ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

РЕАЛИЗАЦИЯ КУРСА «ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ 9 КЛАСС»

Учебно-методическое пособие

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ» КРАСНОДАРСКОГО КРАЯКАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

РЕАЛИЗАЦИЯ КУРСА «ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ» 9 КЛАСС

Учебно-методическое пособие

Краснодар, 2021

УДК 514
ББК 74.262.21
Р 31

Рекомендовано к изданию решением редакционно-издательского совета ГБОУ ИРО Краснодарского края от 17.08.2021 г.

Одобрено на внеочередном заседании Регионального учебно-методического объединения в системе общего образования Краснодарского края (протокол № 4 от 18.08.2021 г.))

Утверждено на заседании Ученого совета ГБОУ ИРО Краснодарского края протоколом № 6 от 31.08.2021 г.

Рецензент:
Васильева Ирина Викторовна, доцент кафедры функционального анализа и алгебры КубГУ, к.п.н.

Реализация курса «Практикум по геометрии, 9 класс»: учебно-методическое пособие. / под ред. Е.Н. Белай. – Краснодар, ГБОУ ИРО Краснодарского края. - 2021. - 176 с.

Авторы–составители:
Белай Елена Николаевна, заведующий кафедрой математики и информатики ГБОУ ИРО Краснодарского края
Барышенский Дмитрий Сергеевич, доцент кафедры математики и информатики ГБОУ ИРО Краснодарского края
Василишина Надежда Владимировна, старший преподаватель кафедры математики и информатики ГБОУ ИРО Краснодарского края
Есипенко Татьяна Николаевна, учитель математики МАОУ гимназии № 92 г. Краснодара
Казакова Наталья Михайловна, учитель математики МБОУ СОШ № 73 г. Краснодара
Кузнецова Ольга Вадимовна, учитель математики МБОУ лицей № 4 г. Краснодара
Саламаха Надежда Сергеевна, учитель математики МБОУ СОШ № 85 г. Краснодара
Соколова Наталья Александровна, учитель математики МБОУ лицей № 4 г. Краснодара
Сучкова Наталья Львовна, учитель математики МАОУ СОШ 10 ст. Петропавловской Курганинского района
Чепрасова Анна Валериевна, учитель математики МБОУ СОШ № 47 г. Краснодара
Экшиян Алиса Андреевна, учитель математики МАОУ гимназии № 92 г. Краснодара

Данное пособие входит в учебно-методический комплект для преподавания элективного курса для обучающихся 9-х классов «Практикум по геометрии» и предназначено для учителей математики. В пособии содержится примерная рабочая программа курса с календарно-тематическим планированием, примерный план - конспект каждого занятия, проверочные и практические работы, ответы ко всем заданиям, исторические сведения по геометрии.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.

Настоящее учебно-методическое пособие для учителя «Реализация курса «Практикум по геометрии, 9 класс» рассчитано на помощь учителю в преподавании элективного курса. В пособии содержится примерная рабочая программа курса с календарно-тематическим планированием, примерный план каждого занятия, проверочные и практические работы, ответы ко всем заданиям.

Каждое занятие начинается с рубрики «Повторяем теорию» для актуализации знаний обучающихся, далее рубрика «Проверяем себя», в которой предлагаются задания на проверку теоретического материала, обозначенные (Т1). Также в каждом занятии предлагается рубрика «Решаем задачи», содержащая по 7 типов заданий (8 а), б), в)). Задания а) обучающиеся решают вместе, обсуждая с учителем. Учитель при необходимости задает дополнительные наводящие вопросы для продвижения в решении заданий. Обучающиеся проговаривают основные понятия, определения, свойства в ходе решения задания. Задания б) обучающиеся решают самостоятельно, возможно, работая в парах. Задания в) предназначены для домашней работы. В некоторых занятиях предусмотрена рубрика «Задачи с развернутым ответом», в которой предлагаются задания повышенного уровня сложности (типа № 23 и № 24 ОГЭ по математике), номера таких заданий подчеркнуты (<u>12</u>). В конце курса предусмотрена рубрика «Исторические сведения».

Для удобства все задания по курсу имеют сквозную нумерацию, после каждого задания приводится ответ. Практические работы содержат практико-ориентированные задания. Возможно проведение практических работ в компьютерном классе, на пришкольном участке, в обычном школьном кабинете по группам и парам с использованием цветной бумаги, ножниц, клея, картона, чертежных инструментов.

Проверочные работы предусмотрены в конце первого полугодия и в конце второго полугодия. Они направлены на оценивание уровня знаний и умений обучающихся на определенном этапе усвоения изучаемого материала.

Итоговое занятие курса учитель проводит по своему усмотрению в зависимости от результатов проверочных работ и уровня усвоенных знаний обучающихся.

В пособии для обучающегося собран краткий теоретический материал, теоретические, практические задачи базового уровня сложности по разделам. Задачи с развернутым ответом и исторические сведения размещены в конце пособия, ответы не предусмотрены.

Примерная рабочая программа элективного курса
«Практикум по геометрии, 9 класс»

Примерная рабочая программа элективного курса «Практикум по геометрии» разработана в соответствии с требованиями ФГОС ООО, на основе примерной основной образовательной программы основного общего образования (сайт www.fgosreestr.ru), с учетом примерной программы воспитания (сайт www.fgosreestr.ru), в соответствии с письмом министерства образования, науки и молодежной политики Краснодарского края от 13.07.2021 № 47-01-13-14546/21 «О составлении рабочих программ учебных предметов и календарно-тематического планирования». Рабочая программа предназначена для обучающихся 9 классов и рассчитана на 34 часа в год.

Данный элективный курс реализуется независимо от УМК по геометрии, по которому ведется преподавание в образовательной организации.

Цель элективного курса:

- создание условий для формирования устойчивых знаний обучающихся по геометрии на базовом уровне.

Задачи элективного курса:

- повышение мотивации обучающихся к изучению геометрии;
- создание «ситуации успеха» у обучающихся при решении геометрических задач;
- обобщение и систематизация геометрических знаний обучающихся;
- совершенствование практических навыков, математической культуры обучающихся;
- применение геометрического аппарата для решения разнообразных математических задач.

1. Планируемые результаты освоения элективного курса.

Изучение геометрии по данной программе способствует формированию у обучающихся личностных, метапредметных и предметных результатов обучения, соответствующих требованиям федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования и примерной программе воспитания.

Личностные результаты:

патриотическое воспитание — проявление интереса к истории и современному состоянию российской математической науки; ценностное отношение к достижениям российских учёных-математиков (Основные направления воспитательной деятельности № 2);

эстетическое воспитание — восприятие эстетических качеств геометрии, её гармоничного построения, строгости, точности, лаконичности; (Основные направления воспитательной деятельности № 4) ценности научного познания — формирование и развитие познавательных мотивов, направленных на получение новых знаний по геометрии необходимых для объяснения наблюдаемых процессов и явлений (Основные направления воспитательной деятельности № 5);

экологическое воспитание — ориентация на применение геометрических знаний для решения задач в области окружающей среды, повышение уровня экологической культуры (Основные направления воспитательной деятельности № 8);

ответственное отношение к учению, готовность и способность обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию;

умение контролировать процесс и результат учебной и математической деятельности;

критичность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач.

Метапредметные результаты:

умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности;

умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией;

умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать;

умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы;

умение понимать и использовать математические средства наглядности (графики, таблицы, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

умение выдвигать гипотезы при решении задач, понимать необходимость их проверки;

понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом.

Предметные результаты:

умение работать с геометрическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи с применением математической терминологии и символики, использовать различные языки математики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

овладение геометрическим языком, умение использовать его для описания предметов окружающего мира, развитие пространственных представлений и изобретательных умений, приобретение навыков геометрический построений

умение измерять длины отрезков, величины углов, использовать формулы для нахождения периметров, площадей и объемов геометрических фигур;

умение применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, калькулятора, компьютера;

находить значения длин линейных элементов фигур и их отношения, градусную меру углов, применяя определения, свойства и признаки фигур и их элементов, равенство фигур;

оперировать с начальными понятиями тригонометрии и выполнять элементарные операции над функциями углов;

использовать свойства измерения длин, площадей и углов при решении задач на нахождение длины отрезка, длины окружности, длины дуги окружности, градусной меры угла;

вычислять длины линейных элементарных фигур и их углы, используя формулы длины окружности и длины дуги окружности, формулы площадей фигур;

вычислять площади треугольников, прямоугольников, параллелограммов, трапеций, кругов и секторов;

вычислять длину окружности, длину дуги окружности;

решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин, используя при необходимости справочники и технические средства.

<u>Обучающийся научится:</u>

- оперировать на базовом уровне понятиями геометрических фигур;
- извлекать информацию о геометрических фигурах, представленную на чертежах в явном виде;
- применять для решения задач геометрические факты, если условия их применения заданы в явной форме;
- решать задачи на нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам;
- оперировать на базовом уровне понятиями: равенство фигур, равные фигуры, равенство треугольников, параллельность прямых, перпендикулярность прямых, углы между прямыми, перпендикуляр, наклонная, проекция;
- выполнять измерение длин, расстояний, величин углов, с помощью инструментов для измерений длин и углов;
- применять формулы периметра, площади и объема при вычислениях, когда все данные имеются в условии;

- применять теорему Пифагора, базовые тригонометрические соотношения для вычисления длин, расстояний, площадей в простейших случаях;
- изображать типовые плоские фигуры и фигуры в пространстве от руки и с помощью инструментов;
- выбирать подходящий изученный метод для решения изученных типов математических задач.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- использовать свойства геометрических фигур для решения типовых задач, возникающих в ситуациях повседневной жизни, задач практического содержания;
- использовать отношения для решения простейших задач, возникающих в реальной жизни;
- вычислять расстояния на местности в стандартных ситуациях, площади в простейших случаях, применять формулы в простейших ситуациях в повседневной жизни;
- выполнять простейшие построения на местности, необходимые в реальной жизни.

Обучающийся получит возможность:

- *овладеть методами решения задач на вычисления и доказательства: методом от противного, методом подобия, методом перебора вариантов;*
- *приобрести опыт применения алгебраического и тригонометрического аппарата при решении геометрических задач;*
- *вычислять площади фигур, составленных из двух или более прямоугольников, параллелограммов, треугольников, круга и сектора;*
- *вычислять площади многоугольников, используя отношения равновеликости и равносоставленности.*

2. Содержание курса

Раздел 1. Углы (7 часов)

Угол. Величина угла. Градусная мера угла. Биссектриса угла. Смежные и вертикальные углы. Углы, образованные параллельными прямыми и секущей. Треугольники. Виды треугольников. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника Углы в равнобедренном, равностороннем треугольниках. Углы, связанные с окружностью. Углы в четырехугольниках. Свойства углов параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции.

Раздел 2. Линии в треугольнике, четырехугольнике и окружности (17 часов)

Высота, медиана, биссектриса, серединный перпендикуляр, средняя линия треугольника. Признаки равенства треугольников, в том числе и прямоугольных. Диагонали и высоты в параллелограмме, ромбе, прямоугольнике, квадрате, трапеции. Средняя линия трапеции. Отрезки и прямые, связанные с окружностью. Касательная и секущая к окружности. Хорда, радиус и диаметр окружности. Вписанные и описанные окружности для треугольников, четырехугольников, правильных многоугольников. Тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике. Определение синуса, косинуса, тангенса острого угла прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора. Теорема, обратная теореме Пифагора. Значения синуса, косинуса, тангенса для углов 30◦, 45◦, 60◦. Вычисление элементов треугольников с использованием тригонометрических соотношений. Треугольники и четырехугольники на клетчатой бумаге.

Раздел 3. Площади фигур (10 часов)

Понятие о площади плоской фигуры и ее свойствах. Измерение площадей. Сравнение и вычисление площадей. Площадь параллелограмма. Площадь прямоугольника. Площадь ромба. Площадь квадрата. Площадь трапеции. Площадь треугольника. Площадь многоугольника. Площадь круга и его частей. Площади фигур, изображенных на клетчатой бумаге.

3. Тематическое (календарно-тематическое) планирование элективного курса

№ занятия	Темы	Дата (план)	Дата (факт)	Основные виды деятельности обучающихся (на уровне учебных действий)	Материально-техническое оснащение (оборудование)*	Универсальные учебные действия (УУД), проекты, ИКТ-компетенции, межпредметные понятия	Основные направления воспитательной деятельности**
	Раздел 1. Углы 7 часов						
1	Угол. Биссектриса угла			Объяснять, что такое угол и градусная мера угла, биссектриса угла; какие углы называются смежными и какие вертикальными; формулировать утверждения о свойствах смежных и вертикальных углов; объяснять с помощью рисунка, какие углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, называются накрест лежащими, какие односторонними и какие соответственными, знать свойства и признаки параллельных прямых. Формулировать теорему о сумме углов треугольника и её следствие о внешнем угле треугольника, знать свойства углов в равнобедренном и равностороннем треугольниках. Формулировать понятия центрального угла и градусной меры дуги окружности; формулировать теоремы: о вписанном угле. Формулировать утверждение о сумме углов выпуклого многоугольника, знать и применять свойства углов в параллелограмме, прямоугольнике, ромбе, квадрате, трапеции	1, 2, 3, 4, 5, 6, 11	<u>Личностные</u>: формирование стартовой мотивации к обучению; положительного отношения к учению, желания приобретать новые знания, умения. <u>Регулятивные</u>: уметь исследовать ситуации, требующие оценки действия в соответствии с поставленной задачей. <u>Познавательные</u>: строить логические цепи рассуждений. <u>Коммуникативные:</u> умение оформлять мысли в устной и письменной речи с учетом речевых ситуаций. <u>ИКТ-компетенции</u>: 1) самостоятельно находить информацию в информационном поле; 2) анализировать информацию. <u>Межпредметные понятия</u>: утверждение, свойства, сравнение, схема, классификация	2, 5, 8
2	Смежные и вертикальные углы						
3	Углы, образованные параллельными прямыми и секущей						
4	Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника						
5	Углы в равнобедренном, равностороннем треугольниках						
6	Углы, связанные с окружностью						
7	Углы в четырехугольниках						
	Раздел 2. Линии в треугольнике, четырехугольнике и окружности 17 часов						
8	Высота, медиана, биссектриса, треугольника			Знать определения высоты, медианы, биссектрисы, серединного перпендикуляра, средней линии треугольника. Формулировать теоремы, связанные с замечательными точками	1, 2, 3, 4, 5, 6, 11	<u>Личностные</u>: формирование воли и настойчивости в достижении цели. <u>Регулятивные</u>: самостоятельно находить и	2, 5, 8
9	Серединный						

<table>
<tr><td></td><td>перпендикуляр, средняя линия треугольника</td><td></td><td></td><td rowspan="11">треугольника: о биссектрисе угла и, как следствие, о пересечении биссектрис треугольника; о серединном перпендикуляре к отрезку и, как следствие, о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; о пересечении высот треугольника. Формулировать и применять признаки равенства треугольников, в том числе и прямоугольных. Изображать и распознавать многоугольники на чертежах; в том числе на клетчатой бумаге, показывать элементы : высоты, диагонали параллелограмма, трапеции, равнобедренной и прямоугольной трапеций, прямоугольника, ромба, квадрата; формулировать утверждения об их свойствах и признаках; решать задачи на вычисление, построение, связанные с этими видами четырёхугольников. Знать определение и свойства средней линии трапеции. Исследовать взаимное расположение прямой и окружности; формулировать определение касательной к окружности; формулировать теоремы: о свойстве касательной, о признаке касательной, об отрезках касательных, проведённых из одной точки; формулировать теоремы: о произведении отрезков пересекающихся хорд; формулировать определения окружностей, вписанной в многоугольник и описанной около многоугольника; формулировать теоремы: об окружности, вписанной в треугольник; об окружности, описанной около треугольника; о свойстве сторон описанного четырёхугольника; о свойстве углов вписанного четырёхугольника; решать задачи на вычисление и построение, связанные с окружностью, вписанными и описанными треугольниками и четырёхугольниками. Уметь формулировать теорему Пифагора и обратную ей; решать задачи на вычисления, связанные с теоремой Пифагора. Формулировать определение и</td><td rowspan="11"></td><td rowspan="11">формулировать учебную проблему, составлять план выполнения работы.
<u>Познавательные:</u>
сопоставлять характеристики объектов по одному или нескольким признакам, выявлять сходства и различия объектов <u>Коммуникативные:</u> умение при необходимости отстаивать свою точку зрения, аргументируя ее, подтверждая аргументы фактами.
<u>ИКТ-компетенции:</u>
1) самостоятельно находить информацию в информационном поле;
2) осуществлять образовательное взаимодействие в информационном пространстве образовательной организации.
<u>Межпредметные понятия:</u> расстояние, свойства, масштаб, вид, сравнение, схема, аналогия, классификация</td><td rowspan="11"></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Признаки равенства треугольников</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>Признаки равенства прямоугольных треугольников</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>Диагонали и высоты в параллелограмме, ромбе, прямоугольнике, квадрате, трапеции</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>Средняя линия трапеции</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>Проверочная работа по теме «Углы. Линии в треугольнике»</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>Отрезки, связанные с окружностью. Хорда, диаметр, радиус</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td>Прямые, связанные с окружностью. Касательная, секущая</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>17</td><td>Вписанная в треугольник окружность</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td>Описанная около треугольника окружность</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>19</td><td>Вписанная в четырехугольник, правильный многоугольник окружность</td><td></td><td></td></tr>
</table>

20	Описанная около четырехугольника, правильного многоугольника окружность			иллюстрировать понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника; знать основное тригонометрическое тождество и значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°. Находить элементы треугольника на клетчатой бумаге.			
21	Теорема Пифагора						
22	Тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике						
23	Значения синуса, косинуса, тангенса для углов 30°, 45°, 60°						
24	Треугольники и четырехугольники на клетчатой бумаге						
	Раздел 3. Площади 10 часов						
25	Площадь плоской фигуры. Площадь параллелограмма			Объяснять, как производится измерение площадей треугольников, многоугольников; круга и его частей; формулировать основные свойства площадей, знать и применять формулы площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции; решать задачи на вычисления, связанные с формулами площадей. Находить площади различных фигур, изображенных на клетчатой бумаге	1, 2, 3, 6, 11, 12, 13, 14	<u>Личностные</u>: формирование нравственно-этического оценивания усваиваемого содержания. <u>Регулятивные:</u> самостоятельно находить и формулировать учебную проблему, составлять план выполнения работы. <u>Познавательные:</u> выполнять учебные задачи, не имеющие однозначного решения. <u>Коммуникативные:</u> воспринимать текст с учетом поставленной учебной задачи, находить в тексте информацию, необходимую для ее решения. <u>ИКТ-компетенции:</u> 1) умение сравнивать и сопоставлять информацию из нескольких источников; 2) умение интерпретировать и представлять информацию.	1, 2, 5
26	Площадь прямоугольника, ромба, квадрата						
27	Площадь трапеции						
28	Площадь треугольника						
29	Площадь круга и его частей						
30	Итоговая проверочная работа						
31	Площади многоугольников, изображенных на клетчатой бумаге						
32	Площади многоугольников, изображенных на						

	клетчатой бумаге					Межпредметные понятия: сравнение, схема, площадь, формула, аналогия, классификация	
33	Практическая работа по теме: «Площади фигур»						
34	Занятие по обобщению и систематизации знаний за курс						
Итого		**34**				проверочные работы – 2 практические работы - 1	

*<u>Материально-техническое оснащение (оборудование)</u>

1.Интернет-ресурс:
https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge#!/tab/173942232-2

2. Учебное пособие для обучающихся «Практикум по геометрии, 9 класс», ГБОУ ИРО Краснодарского края, 2021.
3. Учебно-методическое пособие для учителя «Реализация элективного курса «Практикум по геометрии», 9 класс», ГБОУ ИРО Краснодарского края, 2021.
4. Классный набор чертежных инструментов (линейка классная, угольник классный, циркуль классный, транспортир классный)
5. Доска магнитно-маркерная или меловая.
6. Проектор мультимедийный с креплением
7. Компьютер (ноутбук) педагога.
8. Компьютер (ноутбук) обучающегося.
9. Система голосования (при наличии в ОО).
10. Интерактивная доска (при наличии в ОО).
11. Индивидуальный набор чертежных инструментов обучающегося (линейка, угольник, транспортир).
12. Ножницы.
13. Клей.
14. Цветная бумага, картон.

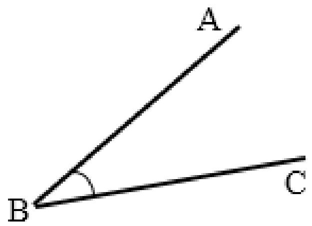
**<u>Основные направления воспитательной деятельности</u>

2. Патриотическое воспитание.
4. Эстетическое воспитание
5. Ценности научного познания.
8. Экологическое воспитание.

Раздел 1. Углы

Занятие 1. Угол. Биссектриса угла.

<u>Повторяем теорию.</u>



Угол – это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки.

Лучи называются *сторонами угла*, общее начало – *вершиной угла*.

BA, BC – стороны, B – вершина

Обозначение угла: $\angle B, \angle ABC, \angle CBA$

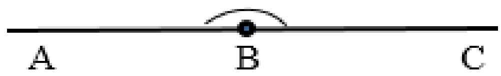
Виды углов: *развернутый, прямой, острый, тупой.*

Угол, стороны которого лежат на одной прямой, называется *развернутым*.

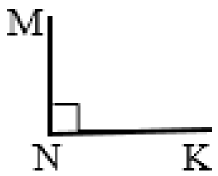
Угол, градусная мера которого равна 90^0, называется *прямым*.

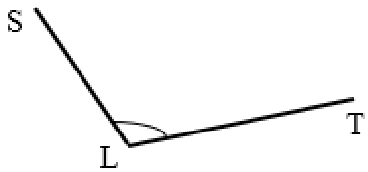
Угол, градусная мера которого меньше 90^0, называется *острым*.

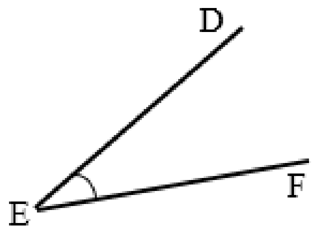
Угол, градусная мера которого больше 90^0, но меньше 180^0, называется *тупым.*



$\angle ABC$ – развернутый

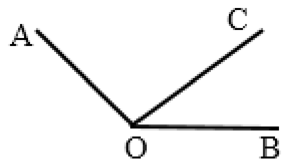






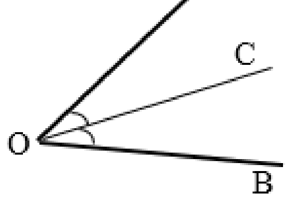
$\angle MNK$ – прямой $\angle SLT$– тупой $\angle DEF$ – острый

Свойство градусной меры угла.



Если луч делит угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.$\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется *биссектрисой угла*.



Луч OC – биссектриса угла $\angle AOB$

<u>Проверяем себя.</u>

Т1. Заполните пропуски:

а) Биссектриса угла – это _______, который делит угол пополам.

Ответ: луч, исходящий из вершины угла

б) Угол, стороны которого лежат ______, называется развернутым.

Ответ: на одной прямой

Т2. Укажите верные утверждения:

а) угол, который больше прямого угла – тупой;

б) биссектриса угла делит его пополам;

в) если угол в 2 раза больше острого, то этот угол является тупым.

Ответ: б)

Т3. Укажите неверные утверждения:

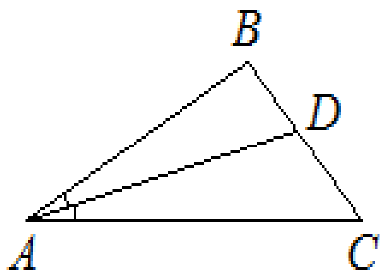
а) сумма двух острых углов всегда является острым углом;

б) острый угол всегда меньше тупого угла;

в) развернутый угол в 2 раза больше острого угла.

Ответ: а), в)

<u>Решаем задачи</u>



1. а) В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 26^0$, AD – биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.

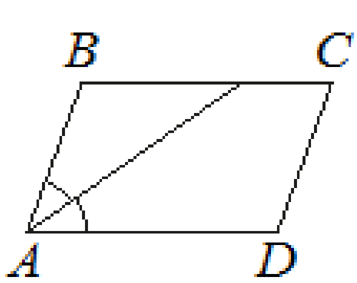
Ответ: 13

б) В треугольнике ABC известно, что $\angle BAD = 38°$, AD – биссектриса. Найдите угол BAC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 76

в) В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC=86°$, AD – биссектриса. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 43



2. а) Найдите острый угол параллелограмма ABCD, если биссектриса угла A образует со стороной BA угол, равный 44°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 88

б) Найдите меньший угол параллелограмма ABCD, если биссектриса угла A образует со стороной BA угол, равный 26°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 52

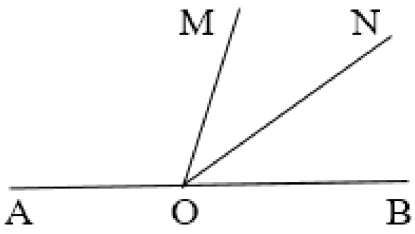
в) Найдите угол A параллелограмма ABCD, если биссектриса угла A образует со стороной AD угол, равный 18°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 36

3. а) Угол AOB – развернутый, луч OM делит его на два угла: AOM и BOM. Луч ON является биссектрисой угла MOB, $\angle AON = 152^0$. Найдите угол MOB.

Ответ дайте в градусах.

Ответ: 56.



б) Угол AOB – развернутый, луч OM делит его на два угла: AOM и BOM. Луч ON является биссектрисой угла MOB, $\angle BON = 33^0$. Найдите угол MOA. Ответ дайте в градусах.

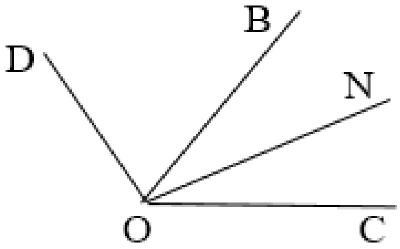
Ответ: 114

в) Угол AOB – развернутый, луч OM делит его на два угла: AOM и BOM. Луч ON является биссектрисой угла MOB, $\angle MON = 21^0$. Найдите угол AON. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 159

4. а) Луч OB – биссектриса угла DOC, луч ON – биссектриса угла BOC. Найдите угол BON, если $\angle DOB = 52^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 26



б) Луч OB – биссектриса угла DOC, луч ON – биссектриса угла BOC. Найдите угол BOD, если $\angle NOC = 22^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 44

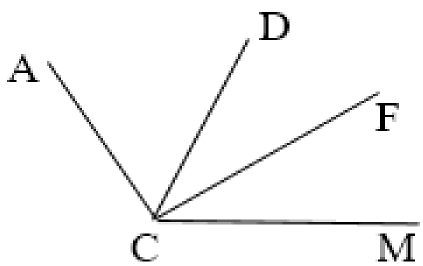
в) Луч OB – биссектриса угла DOC, луч ON – биссектриса угла BOC. Найдите угол DOC, если $\angle NOB = 37^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 148

5. а) Луч CF – биссектриса угла DCM. Найдите угол ACM,

если $\angle DCF = 11^0, \angle ACD = 39^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 61



б) Луч CF – биссектриса угла DCM. Найдите угол DCF,

если $\angle ACM = 121^0, \angle ACD = 45^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 38

в) Луч CF – биссектриса угла DCM. Найдите угол ACD,

если $\angle DCF = 15^0, \angle ACM = 102^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 72

6. а) Лучи OM и OL проходят между сторонами прямого угла COD так, что $\angle COL = 71^0$, $\angle MOD = 59^0$. Найдите угол MOL. Ответ дайте в градусах.

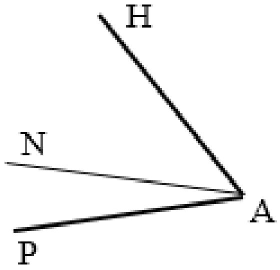
Ответ: 40

б) Лучи OM и OL проходят между сторонами прямого угла COD так, что $\angle COL = 25^0$, $\angle MOD = 40^0$. Найдите угол MOL. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 25

в) Лучи OM и OL проходят между сторонами прямого угла COD так, что $\angle COL = 67^0$, $\angle MOD = 60^0$. Найдите угол MOL. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 37



7. а) Луч AN разделил угол HAP, равный 84^0, на два угла так, что $\angle NAP$ в 2 раза меньше $\angle HAN$. Найдите градусную меру меньшего из образовавшихся углов. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 28

б) Луч AN разделил угол HAP, равный 76^0, на два угла так, что $\angle HAN$ в 3 раза больше $\angle NAP$. Найдите градусную меру большего из образовавшихся углов. Ответ дайте в градусах.

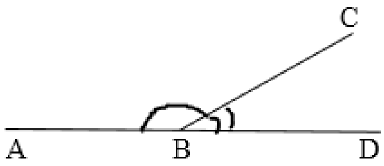
Ответ: 57

в) Луч AN разделил угол HAP, равный 78^0, на два угла так, что $\angle NAP$ в 5 раз меньше $\angle HAN$. Найдите градусную меру большего из образовавшихся углов. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 65

Занятие 2. Смежные и вертикальные углы.

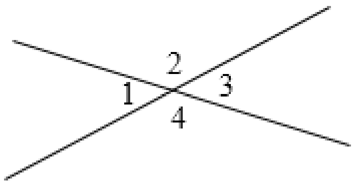
Повторяем теорию.



Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются *смежными.*

Сумма смежных углов равна 180^0.

$$\angle ABC + \angle CBD = 180^0$$



Два угла называются *вертикальными,* если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

$\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$ вертикальные.

Вертикальные углы равны. $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

Проверяем себя.

Т4. Ответьте на вопросы:

а) Если данный угол тупой, то каким будет угол, смежный с ним?

б) Если данный угол тупой, то каким будет угол, вертикальный с ним?

в) Если данный угол увеличить, как изменится угол, смежный с ним?

г) Если данный угол увеличить, как изменится угол, вертикальный ему?

д) Если данный угол уменьшить в 2 раза, как изменится угол, вертикальный ему?

е) Если данный угол тупой, то какой угол больше: смежный с ним или вертикальный ему?

ж) Если данный угол увеличить на 20^0, как изменится угол, смежный с ним?

Ответ: а) острый, б) тупой, в) уменьшится, г) увеличится, д) уменьшится в 2 раза, е) вертикальный, ж) уменьшится на 20^0.

Т5. Выберите неверные утверждения:

а) Если угол равен 35^0, то смежный с ним равен 65^0.

б) Через любую точку плоскости можно провести прямую.

в) Смежные углы равны.

г) Биссектриса делит угол на два равных угла.

Ответ: а), в)

Т6. Какие из следующих утверждений верны?

а) Сумма вертикальных углов равна 180^0.

б) Через любые две точки плоскости можно провести прямую.

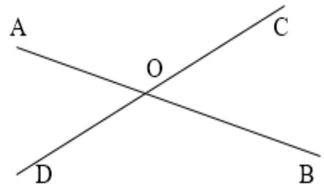
в) Градусная мера острого угла меньше 90^0.

г) Если данный угол увеличить на 20^0, то вертикальный с ним угол увеличится на 20^0.

Ответ: б), в), г).

Решаем задачи.

8. а) Найдите угол AOD, если $\angle AOD + \angle BOC = 94^0$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 47

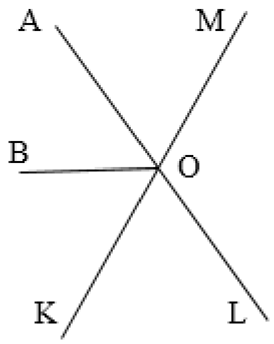
б) Найдите угол AOD, если $\angle AOD + \angle BOC = 75^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 37,5

в) Найдите угол AOC, если $\angle AOC + \angle BOD = 49^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 24,5

9. а) Луч OB – биссектриса угла AOK. Найдите величину угла AOB, если $\angle AOM = 40^0$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 70

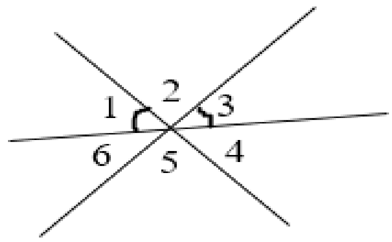
б) Луч OB – биссектриса угла AOK. Найдите величину угла BOM, если $\angle KOL = 55^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 117,5

в) Луч OB – биссектриса угла AOK. Найдите величину угла LOK, если $\angle AOB = 52^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 76

10. а) На рисунке $\angle 1 = \angle 3$. Найдите $\angle 6$, если $\angle 2 + \angle 5 = 200^0$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 40

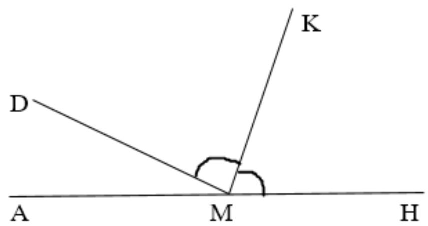
б) На рисунке $\angle 1 = \angle 3$. Найдите $\angle 5$, если $\angle 1 + \angle 4 = 67^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 113

в) На рисунке $\angle 1 = \angle 3$. Найдите $\angle 4$, если $\angle 2 + \angle 5 = 240^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 30.

11. а) На прямой AH взята точка M. Луч MK – биссектриса угла DMH. Известно, что $\angle HMK = 49^0$. Найдите угол DMA. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 82

б) На прямой AH взята точка M. Луч MK – биссектриса угла DMH. Известно, что $\angle AMK = 128^0$. Найдите угол DMK. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 52

в) На прямой АН взята точка М. Луч МК – биссектриса угла DMH. Известно, что $\angle DMA = 40^0$. Найдите угол DMK. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 70

12. а) Один из смежных углов в 2 раза больше другого. Найдите градусную меру большего угла.

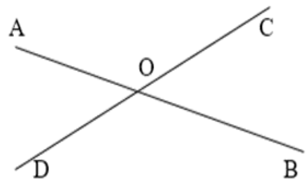
Ответ: 120

б) Один из смежных углов в 3 раза меньше другого. Найдите градусную меру меньшего угла.

Ответ: 45

в) Один из смежных углов в 5 раз меньше другого. Найдите градусную меру большего угла.

Ответ: 150



13. а) Найдите угол СОВ, если $\angle AOC - \angle AOD = 20^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 80

б) Найдите угол DOB, если $\angle AOC - \angle BOC = 48^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 114

в) Найдите угол СОА, если $\angle BOD - \angle AOD = 70^0$. Ответ дайте в градусах. *Ответ: 125.*

14. а) Градусные меры смежных углов относятся 2:3. Найдите градусную меру меньшего угла.

Ответ: 72

б) Градусные меры смежных углов относятся 3:7. Найдите градусную меру большего угла.

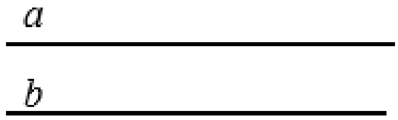
Ответ: 126

в) Градусные меры смежных углов относятся 4:5. Найдите градусную меру меньшего угла.

Ответ: 80.

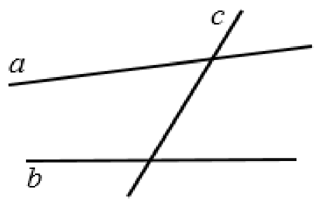
Занятие 3. Углы, образованные параллельными прямыми и секущей.

<u>Повторяем теорию.</u>

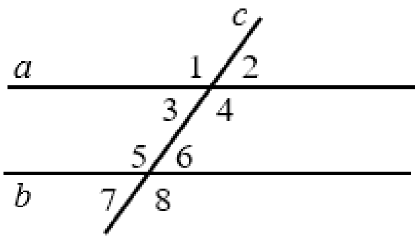


Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

$$a \parallel b$$



Прямая c называется *секущей* по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух точках.



При пересечении двух прямых секущей образуются 8 углов.

$\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$ – *внутренние накрест лежащие углы*

$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ – *внутренние односторонние углы*

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$ – *соответственные углы*

Признаки параллельности прямых.

1. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
2. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
3. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180^0, то прямые параллельны.

Свойства параллельных прямых.

1. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.
2. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180^0.
3. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Аксиома параллельных прямых.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Следствия.

1. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.
2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

<u>Проверяем себя.</u>

Т7. Вставьте пропущенные слова:

а) Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то эти две прямые ____________________.

б) Если две прямые ________ не пересекаются, то они _________.

Ответ: а) параллельны; б) на плоскости, параллельны.

Т8. Верно ли утверждение:

а) Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то они перпендикулярны.

б) Если угол равен 80^0, то вертикальный ему угол равен 100^0.

в) Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то сумма односторонних углов равна 180^0.

г) Если две прямые не пересекаются, то они параллельны.

д) Если при пересечении двух прямых третьей прямой накрест лежащие углы равны 18°, то эти две прямые параллельны.

е) Если угол прямой, то смежный с ним угол также является прямым.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да; г) нет; д) да; е) да.

Т9. Выберите верные утверждения:

а) Накрест лежащие углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, равны.

б) Любые две прямые имеют ровно одну общую точку.

в) Если при пересечении двух прямых третьей прямой накрест лежащие углы составляют в сумме 90°, то эти две прямые параллельны.

г) Через любые три точки проходит ровно одна прямая.

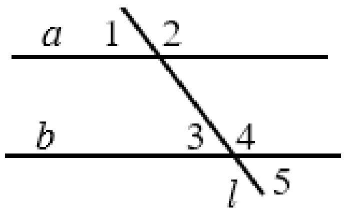
д) Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны 43^0, то эти две прямые параллельны.

Ответ: а), д).

<u>Решаем задачи.</u>

15. а) Прямые a и b параллельны. Найдите $\angle 1$, если $\angle 4 = 129^0$.

Ответ: 51

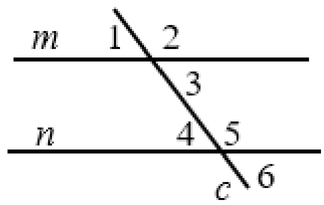


б) Прямые a и b параллельны. Найдите $\angle 5$, если $\angle 1 = 63^0$.

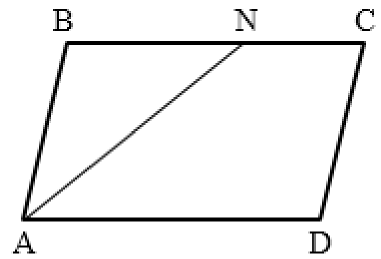
Ответ: 63

в) Прямые a и b параллельны. Найдите $\angle 2$, если $\angle 3 = 23^0$.

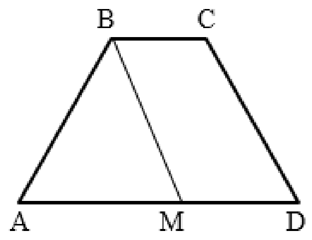
Ответ: 157



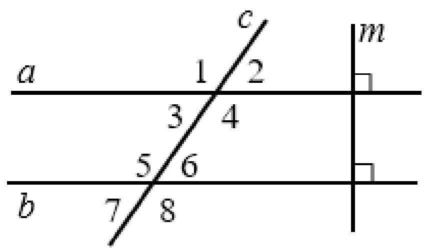
16. а) Прямые m и n параллельны. Найдите $\angle 2$, если $\angle 3 + \angle 4 = 98^0$.
Ответ: 131
б) Прямые m и n параллельны. Найдите $\angle 6$, если $\angle 2 + \angle 5 = 225^0$.
Ответ: 67,5.
в) Прямые m и n параллельны. Найдите $\angle 6$, если $\angle 1 + \angle 4 = 102^0$.
Ответ: 51.



17. а) В параллелограмме ABCD AN – биссектриса угла BAD. Найдите угол BNA, если $\angle BAD = 54^0$. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 27
б) В параллелограмме ABCD AN – биссектриса угла BAD. Найдите угол CNA, если $\angle BAN = 32^0$. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 148
в) В параллелограмме ABCD AN – биссектриса угла BAD. Найдите угол BAD, если $\angle CNA = 164^0$. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 32

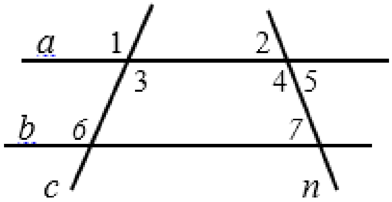


18. а) В трапеции ABCD BM – биссектриса угла ABC. Найдите $\angle ABC$, если $\angle AMB = 55^0$. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 110
б) В трапеции ABCD BM – биссектриса угла ABC. Найдите $\angle DMB$, если $\angle ABC = 144^0$. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 108
в) В трапеции ABCD BM – биссектриса угла ABC. Найдите $\angle ABC$, если $\angle BMD = 130^0$. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 100



19. а) Прямая $m \perp a$ и $m \perp b$. Найдите $\angle 2$, если $\angle 3 + \angle 7 = 150^0$. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 75
б) Прямая $m \perp a$ и $m \perp b$. Найдите $\angle 8$, если $\angle 2 + \angle 6 = 45^0$. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 157,5
в) Прямая $m \perp a$ и $m \perp b$. Найдите $\angle 4$, если $\angle 1 + \angle 5 = 206^0$. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 103

20. а) На рисунке: $\angle 2 = \angle 7$, $\angle 3 = 155^0$. Найдите $\angle 6$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 155

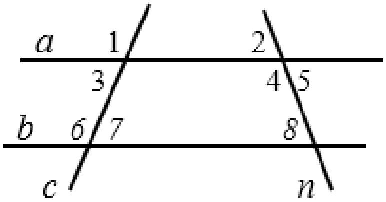
б) На рисунке: $\angle 1 = \angle 6$, $\angle 4 = 117^0$. Найдите $\angle 7$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 63

в) На рисунке: $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 7 = 47^0$. Найдите $\angle 5$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 47

21. а) Известно, что $\angle 1 + \angle 7 = 180^0$, $\angle 4 - \angle 8 = 40^0$. Найдите $\angle 5$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 70

б) Известно, что $\angle 2 = \angle 8$, $\angle 1 - \angle 7 = 23^0$. Найдите $\angle 3$. Ответ дайте в градусах.

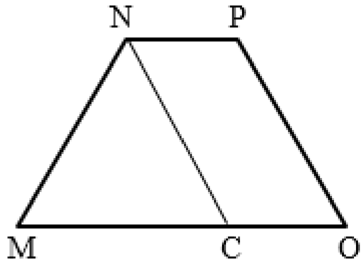
Ответ: 78,5

в) Известно, что $\angle 4 + \angle 8 = 180^0$, $\angle 6 - \angle 3 = 18^0$. Найдите $\angle 7$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 81

Задачи с развернутым ответом

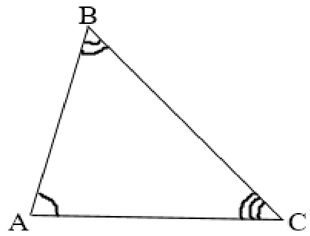
1. В трапеции MNPO биссектриса NC угла MNP параллельна стороне PO. Найдите $\angle P$, если $\angle MNC = 53^0$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 127

Занятие 4. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника.

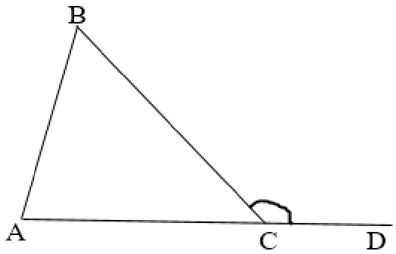
<u>Повторяем теорию.</u>



Теорема.

Сумма углов треугольника равна 180^0.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$$



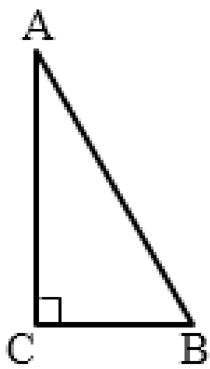
Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

$\angle BCD$ *– внешний.*

Свойство.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

$\angle BCD = \angle A + \angle B.$



Свойства прямоугольного треугольника.

1. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90^0.

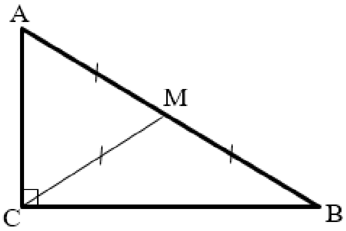
$$\angle A + \angle B = 90^0$$

2. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30^0, равен половине гипотенузы.

Если $\angle A = 30^0$, *то* $CB = \frac{1}{2}AB$

3. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30^0.

Если $CB = \frac{1}{2}AB$, *то* $\angle A = 30^0$



4. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Если CM – медиана, то $CM = \frac{1}{2}AB.$

<u>Проверяем себя.</u>

Т10. Выберите верные утверждения:

а) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов.

б) Смежные углы равны.

в) Вертикальные углы равны.

г) В тупоугольном треугольнике все углы тупые.

Ответ: в).

Т11. Выберите неверные утверждения:

а) Сумма смежных углов 180°.

б) Сумма углов треугольника 180°.

в) Сумма вертикальных углов 180°.

г) Один из углов треугольника всегда не превышает 60 градусов.

д) Внешний угол больше любого внутреннего угла треугольника

Ответ: в), д).

Т12. Заполните пропуски:

а) Внешний угол треугольника равен ___________ двух углов треугольника, не смежных с ним.

б) В остроугольном треугольнике _______ острые.

Ответ: а) сумме; б) все углы.

<u>Решаем задачи</u>

22. а) В треугольнике два угла равны 26° и 63°. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 91

б) Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 34°. Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ:56

в) Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 47°. В ответ запишите наименьший угол треугольника.

Ответ: 43

23. а) В треугольнике ABC ∠B=15°, угол A в 2 раза больше. Найдите ∠C.

Ответ:135

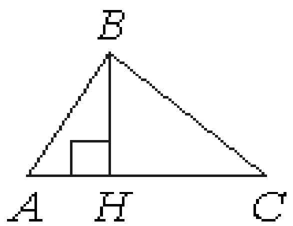
б) В треугольнике ABC ∠B в 3 раза больше ∠A. Найдите ∠C, если ∠A=20°.

Ответ: 100.

в) В треугольнике ABC ∠A в 2 раза больше ∠B, ∠B=30°. Найдите ∠C.

Ответ: 90.

24. а) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH, ∠BAC=46°. Найдите угол ABH. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 44

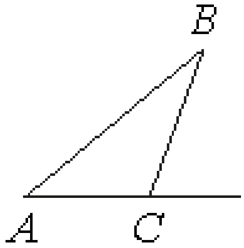
б) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведена высота BH, ∠BAC=54°. Найдите угол HBC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 54

в) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH, ∠BCA=50°. Найдите угол HBC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 40

25. а) В треугольнике ABC угол A равен 23°, угол B равен 24^0. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 47

б) В треугольнике ABC внешний угол при вершине C равен 124°. Найдите сумму углов A и B. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 124

в) В треугольнике ABC внешний угол при вершине C равен 80°, угол A равен 44^0. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 36

26. а) В треугольнике ABC известно, что AB = 5, BC = 10, угол A равен 90°. Найдите ∠B.

Ответ: 60

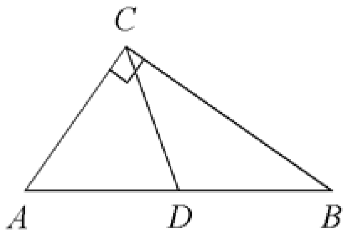
б) В треугольнике ABC известно, что AB = 17, BC = 34, угол A равен 90°. Найдите ∠C.

Ответ: 30

в) В треугольнике ABC известно, что AC = 44, BC = 88, угол A равен 90°. Найдите ∠C.

Ответ: 60

27. а) В треугольнике ABC CD — медиана, угол C равен 90°, угол B равен 35°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 55

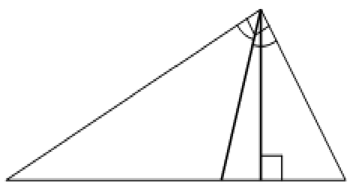
б) В треугольнике ABC CD — медиана, угол C равен 90°, угол A равен 56°. Найдите угол ADC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 68

в) В треугольнике ABC CD — медиана, угол C равен 90°, угол A равен 24°. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 66

28. а) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника.



Ответ дайте в градусах.

Ответ: 31

б) В прямоугольном треугольнике меньший угол равен 23^0. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 22

в) В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 8°. Найдите больший острый угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 53

<u>Задачи с развернутым ответом</u>

<u>1.</u> В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла равен 18^0. Найдите больший острый угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 54

<u>2.</u> Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 156^0. Найдите этот третий угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 102

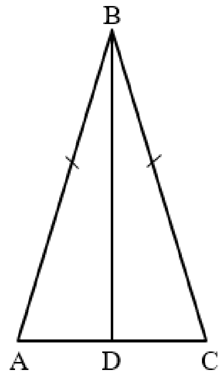
<u>3.</u> В остроугольном треугольнике DEF EH – высота, DM – биссектриса, O – точка пересечения прямых EH и DM, угол EDF равен 28^0. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 104

Занятие 5. Углы в равнобедренном, равностороннем треугольниках.

Повторяем теорию.

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. ΔABC – равнобедренный.



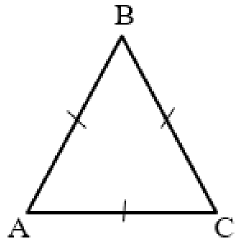
Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона – *основанием*.

$AB = CB$ – боковые стороны, AC – основание

Свойства равнобедренного треугольника.

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. $\angle A = \angle C$
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

BD – биссектриса, высота, медиана.



Треугольник, все стороны которого равны, называется *равносторонним***.**

ΔABC – *равносторонний* $AB = BC = AC$.

Свойства равностороннего треугольника.

1. В равностороннем треугольнике все углы равны по 60^0.
2. В равностороннем треугольнике биссектриса, медиана и высота, проведенные из одной вершины, совпадают.

Для решения задач 30 и 31 можно использовать значения тригонометрических функций острого угла в прямоугольном треугольнике или теорему Пифагора.

Проверяем себя.

Т13. Выберите неверные утверждения:

а) В равностороннем треугольнике две стороны равны.

б) Любая медиана равностороннего треугольника является биссектрисой и высотой.

в) В равнобедренном треугольнике хотя бы два угла равны.

г) В равностороннем треугольнике все углы по 60°.

Ответ: а)

Т14. Выберите верные утверждения:

а) Если в равнобедренном треугольнике есть угол 60°, то треугольник равносторонний.

б) Любая биссектриса равнобедренного треугольника является медианой и высотой.

в) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

г) Если в треугольнике высота является медианой, то треугольник-равнобедренный.

Ответ: а), в), г)

Т15. Выберите верные утверждения:

а) Если в прямоугольном треугольнике есть угол 45°, то треугольник – равнобедренный.

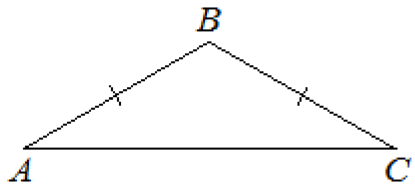
б) В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.

в) Сумма углов равностороннего треугольника равна 180°.

г) Треугольник, в котором две стороны равны, называется равнобедренным.

Ответ: а), б), в), г).

<u>Решаем задачи</u>



29. а) В треугольнике ABC известно, что AB=BC, ∠ABC=124°. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.

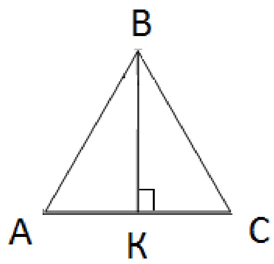
Ответ: 28

б) В треугольнике ABC известно, что AB=BC, ∠ACB=42°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 96

в) В треугольнике ABC известно, что AB=BC, ∠ABC=73°. Найдите угол BAC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 53,5



30. а) В треугольнике ABC AB=BC=AC, Найдите высоту ВК, если AB = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

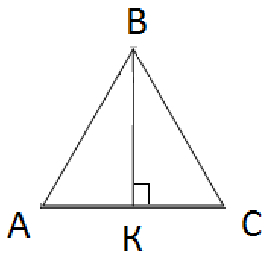
Ответ: 1

б) В треугольнике ABC AB=BC=AC, Найдите высоту ВК, если КС = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: 2

в) В треугольнике ABC AB=BC=AC, Найдите высоту ВК, если АС = $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Ответ: 0,3.



31. а) В равностороннем треугольнике ABC, высота ВК равна $2\sqrt{3}$. Найдите сторону треугольника.

Ответ: 4

б) В равностороннем треугольнике ABC, высота ВК равна $3\sqrt{3}$ м. Найдите КС. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 300

в) В равностороннем треугольнике ABC, высота ВК равна $5\sqrt{3}$ м. Найдите сторону треугольника. Ответ дайте в метрах.

Ответ: 10

32. а) В треугольнике ABC AB=BC=AC. Найдите внешний угол при вершине B. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 120

б) В треугольнике ABC высота BK является медианой, угол A равен 60°,

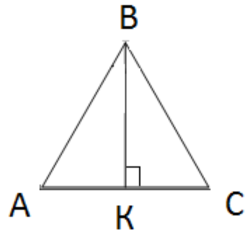
AC = 6 см. Найдите AB. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 6

в) В треугольнике ABC высота BK является биссектрисой, угол A равен 60°, AC = 2 см. Найдите периметр треугольника. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 6

33. а) В треугольнике ABC BK – биссектриса, AB = BC, ∠ABC = 60°. Найдите периметр треугольника ABC, если AK = 4.

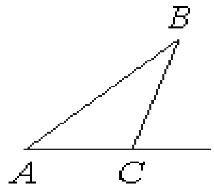


Ответ: 24

б) В треугольнике ABC BK-высота, AK=KC, ∠ABC= 100°. Найдите ∠BCA. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 40

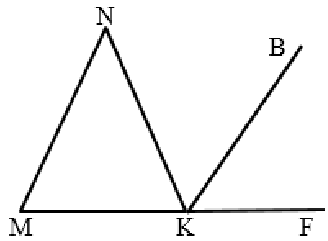
в) Найдите внешний угол треугольника при вершине C, если AC=BC и угол A равен 15°. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 30

34. а) В треугольнике MNK MN = NK, KB – биссектриса внешнего угла при вершине K. Найдите $\angle N$,

если $\angle BKF = 57^0$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 48

б) В треугольнике MNK MN = NK, KB – биссектриса внешнего угла при вершине K. Найдите $\angle MKB$,

если $\angle N = 36^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 126

в) В треугольнике MNK MN = NK, KB – биссектриса внешнего угла при вершине K. Найдите $\angle BKF$, если $\angle M = 78^0$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 51

35. а) В треугольнике ABC BC=AB, $\angle BCA : \angle ABC = 1 : 7$. Найдите больший угол треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 140

б) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол A на 30° меньше угла B. Найдите больший угол треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 70

в) В треугольнике ABC BC=AB, $\angle BCA : \angle ABC = 4 : 1$. Найдите меньший угол треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 20

Задачи с развернутым ответом

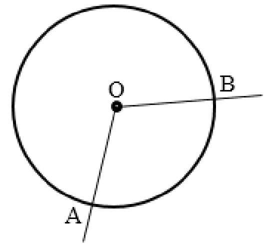
1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на сторонах AB и BC отмечены соответственно точки D и M так, что BD = BM. O – точка пересечения отрезков CD и AM. Докажите, что треугольник AOC – равнобедренный.

Занятие 6. Углы, связанные с окружностью.

<u>Повторяем теорию.</u>

Угол с вершиной в центре окружности, называется ее *центральным* углом.

$\angle AOB$ – *центральный*



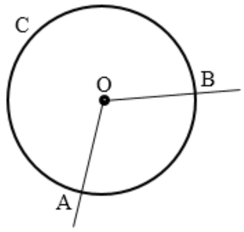
Если дуга AB окружности с центром O меньше полуокружности или является полуокружностью, то ее градусная мера равна градусной мере центрального угла AOB.

$\cup AB = \angle AOB$

Если дуга ACB окружности с центром O больше полуокружности, то ее градусная мера равна

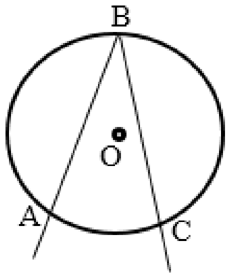
$360^0 - \angle AOB.$

$\cup ACB = 360° - \angle AOB$



Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным* углом.

$\angle ABC$ – *вписанный.*



Теорема.

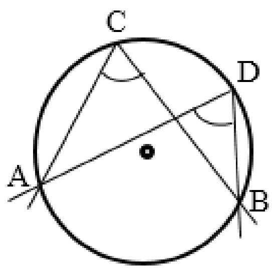
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$

Следствия.

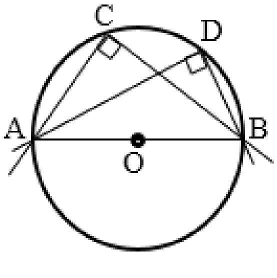
1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

$$\angle ACB = \angle ADB$$



2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, – прямой.

$\cup AB$ – полуокружность, то $\angle ACB = \angle ADB = 90^0$



<u>Проверяем себя.</u>

Т16. Укажите верные утверждения:

а) Угол, вписанный в окружность, равен соответствующему центральному углу, опирающемуся на ту же дугу.

б) Угол, вписанный в окружность, в два раза больше соответствующего центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

в) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.

г) Если вписанный угол опирается на дугу, составляющую 20% окружности, то он равен 36^0.

Ответ: в), г)

Т17. Укажите неверные утверждения:

а) Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

б) Диаметр делит окружность на две равные дуги.

в) Центральный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

г) Если вписанные углы равны, то они опираются на одну и ту же дугу.

Ответ: в), г)

Т18. Заполните пропуски:

а) Угол, вершина которого …, а … окружность, называется вписанным углом.

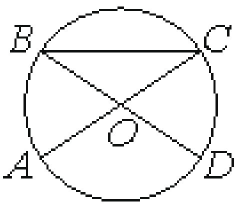
б) Вписанный угол …, на которую он опирается.

в) Вписанный угол, опирающийся на …, – прямой.

Ответ: а) лежит на окружности; стороны пересекают; б) измеряется половиной дуги; в) полуокружность

<u>Решаем задачи.</u>

36. а) В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 124°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

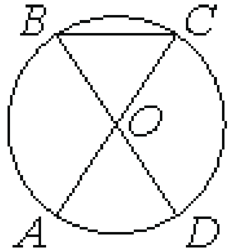


Ответ: 28

б) В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Вписанный угол ACB равен 35°. Найдите центральный угол AOD. Ответ дайте в градусах.

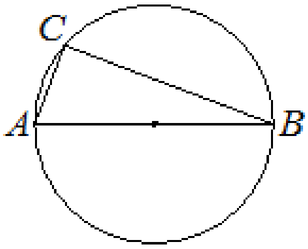
Ответ:110

в) В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 88°. Найдите угол DBC. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 46

37. а) Вершины треугольника ABC лежат на окружности, центр которой, находится на стороне AB. Найдите угол BAC, если угол ABC равен 54°. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 36

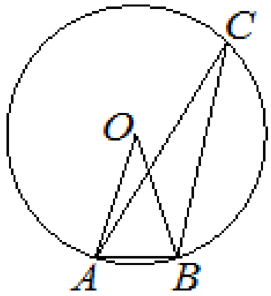
б) Вершины треугольника ABC лежат на окружности, центр которой, находится на стороне AB. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 75°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 15

в) Вершины треугольника ABC лежат на окружности, центр которой, находится на стороне AB. Найдите угол BAC, если угол ABC равен 34°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 56.

38. а) Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром в точке O. Точки O и C лежат по одну сторону относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен 27°. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 13,5

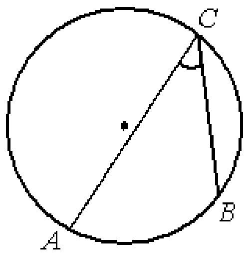
б) Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром в точке O. Точки O и C лежат по одну сторону относительно прямой AB. Найдите угол OAB, если угол ACB равен 27°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 63

в) Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром в точке O. Точки O и C лежат по одну сторону относительно прямой AB. Найдите угол AOB, если угол ACB равен 27°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 54

а) На окружности отмечены точки A, B и C. Дуга окружности AC, не содержащая точку B, составляет 200°. Дуга окружности BC, не содержащая точку A, составляет 80°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 40

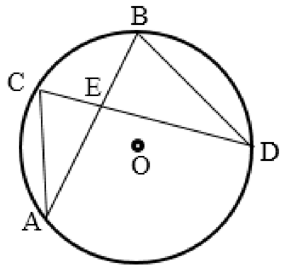
б) На окружности отмечены точки A, B и C. Дуга окружности AC, не содержащая точку B, составляет 120°, вписанный угол ACB составляет 70°. Найдите дугу окружности BC, не содержащую точку A. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 100

в) На окружности отмечены точки A, B и C. Дуга окружности AC, не содержащая точку B, составляет 160°. Дуга окружности BC, не содержащая точку A, составляет 50°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 75.

39. а) Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Известно, что $\angle CAB = 27^0, \angle CEA = 75^0$ Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 78

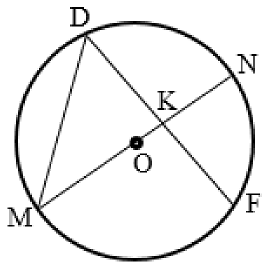
б) Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Известно, что $\angle CDB = 45^0, \angle BED = 63^0$ Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 144

в) Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Известно, что $\angle DBA = 59^0$, $\angle BED = 47^0$ Найдите угол CAB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 74

40. а) На окружности по разные стороны от диаметра MN взяты точки D и F так, что $MN \perp DF$. Известно, что $\angle FDM = 56^0$. Найдите градусную меру дуги FND. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 136

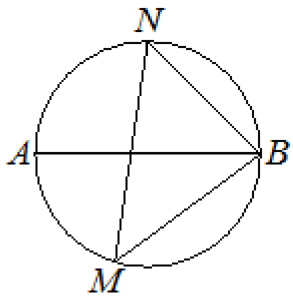
б) На окружности по разные стороны от диаметра MN взяты точки D и F так, что $MN \perp DF$. Известно, что $\angle DMK = 39^0$. Найдите градусную меру дуги FMD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 204

в) На окружности по разные стороны от диаметра MN взяты точки D и F так, что $MN \perp DF$. Известно, что $\angle FDM = 64^0$. Найдите градусную меру дуги FN, не содержащую точку M. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 52

41. а) На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA=43° и MB=BN. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 47

б) На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠MNB=20° и MB=BN. Найдите дугу MN, не содержащую точку B. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 280

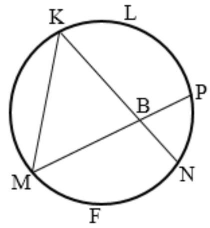
в) На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA=26° и MB=BN. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 64.

Задачи с развернутым ответом

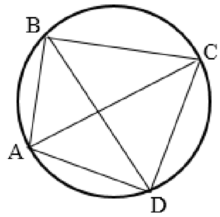
1. Центральный угол на 47^0 больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 47



2. Хорды MP и KN пересекаются в точке B. Известно, что $\smile KLP = 150^0$, $\smile MFN = 120^0$ Найдите угол KBP. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 135



3. Точки A, B, C, D лежат на окружности. Угол ABD равен 38^0, угол CAD равен 54^0. Найдите угол ADC.

Ответ: 88

Занятие 7. Углы в четырехугольниках.

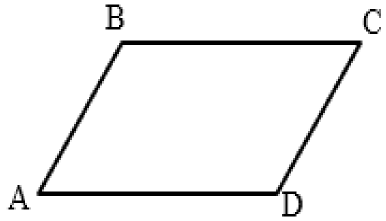
Повторяем теорию.

Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^0$.

Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360^0.

Свойства углов четырехугольников.

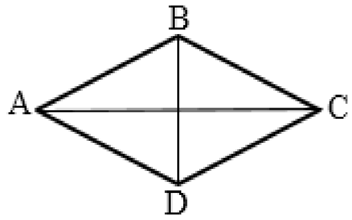


1. В *параллелограмме* противоположные углы равны.

$\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D$

2. В *параллелограмме* сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180^0.

$\angle A + \angle B = 180^0,\ \angle B + \angle C = 180^0$



3. В *ромбе* диагонали делят его углы пополам.

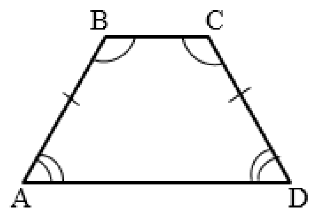
ABCD – ромб, то

$$\angle BAC = \angle DAC, \angle BCA = \angle DCA$$
$$\angle ABD = \angle CBD, \angle ADB = \angle CDB$$

4. В *ромбе* диагонали перпендикулярны.

$$AC \perp BD$$

5. В *квадрате* все углы прямые.



6. В *равнобедренной трапеции* углы при каждом основании равны.

ABCD – равнобедренная трапеция, то

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle C$$

Проверяем себя.

Т19. Выберите верные утверждения:

а) В параллелограмме есть два равных угла.

б) Если в ромбе один из углов 90°, то такой ромб – квадрат.

в) В ромбе все углы равны.

г) Существует выпуклый четырехугольник, все углы которого острые.

д) Существует выпуклый четырехугольник, все углы которого прямые.

Ответ: а), б), д).

Т20. Выберите неверные утверждения:
а) В равнобедренной трапеции углы при основании равны.
б) В параллелограмме сумма любых двух углов равна 180°
в) Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.
г) Существует трапеция, все углы которой равны.
Ответ: б), г).

Т21. Выберите верное утверждение:
1) Диагонали квадрата являются биссектрисами его углов.
2) Диагонали прямоугольника пересекаются под прямым углом.
3) Существует параллелограмм с углами 30° и 120°.
Ответ: 1.

Решаем задачи

43. а) Один из углов параллелограмма равен 61°. Найдите больший угол этого параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 119

б) Сумма противоположных углов параллелограмма равна 150°. Найдите больший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 105

в) Сумма противоположных углов параллелограмма равна 240°. Найдите меньший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60

44. а) Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 16:29. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 116

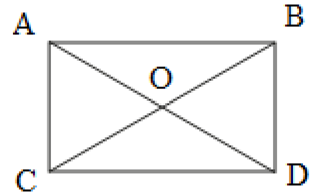
б) Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 11:61. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 152,5

в) Найдите меньший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 13:23. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 65

45. а) Диагональ прямоугольника образует угол 50° с одной из его сторон. Найдите острый угол между диагоналями этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 80

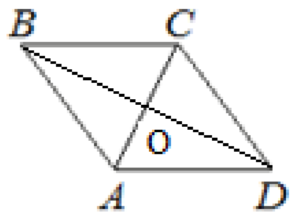
б) Угол DOB между диагоналями прямоугольника 50°. Найдите угол CDO.Ответ дайте в градусах

Ответ: 25

в) Угол DOB между диагоналями прямоугольника 40°. Найдите угол между диагональю BC и стороной BD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 70

46. а) В ромбе ABCD угол CBD равен 11°. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 158

б) В ромбе ABCD угол DCA равен 63°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 27

в) В ромбе ABCD угол ABC равен 82°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 49.

47. а) Найдите больший угол равнобедренной трапеции ABCD, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной AB углы, равные 46° и 1° соответственно. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 133

б) Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 102°. Найдите больший угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 129

в) Один из углов равнобедренной трапеции равен 55°. Найдите больший угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 125.

48. а) Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если разность противолежащих углов равна 6^0? Ответ дайте в градусах.

Ответ: 93

б) Чему равен меньший угол равнобедренной трапеции, если разность противолежащих углов равна 25^0? Ответ дайте в градусах.

Ответ: 77,5

в) Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если разность противолежащих углов равна 80^0? Ответ дайте в градусах.

Ответ: 130

49. а) Угол выпуклого четырехугольника равен 40°, второй угол на 65° больше, два других угла одинаковые. Найдите один из этих углов. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 107,5

б) Углы выпуклого четырехугольника относятся как 1:2:3:4. Найдите больший угол четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ:144

в) Сумма трех углов четырехугольника 270°. Найдите четвертый угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 90.

Задачи с развернутым ответом

1. Найдите острый угол прямоугольной трапеции, основания которой равны 18 и 9 и меньшая сторона равна 9. Ответ дайте в градусах.

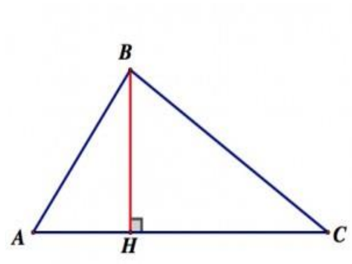
Ответ: 45

Раздел 2. Линии в треугольнике, четырехугольнике и окружности.

Занятие 8. Высота, медиана, биссектриса треугольника

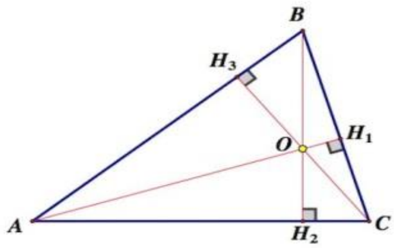
Повторяем теорию.

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется *высотой треугольника.*

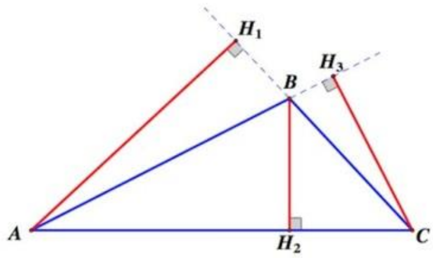


Любой треугольник имеет три высоты.

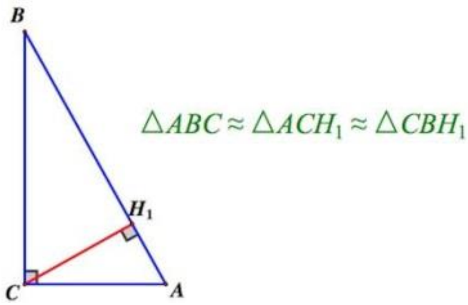
Если треугольник остроугольный, то высоты пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника.



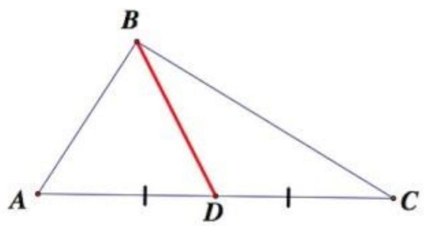
Если треугольник тупоугольный, то высоты пересекаются вне треугольника.



В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает треугольник на два треугольника, подобных данному.



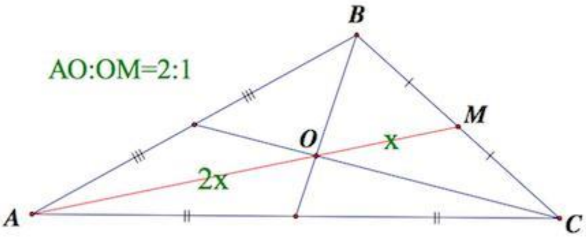
Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называется *медианой треугольника.*



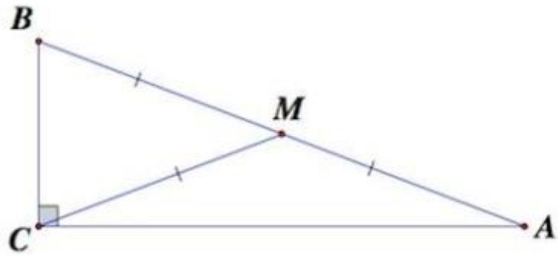
Любой треугольник имеет три медианы. Все медианы пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника.

Свойство медиан треугольника:

Все медианы пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

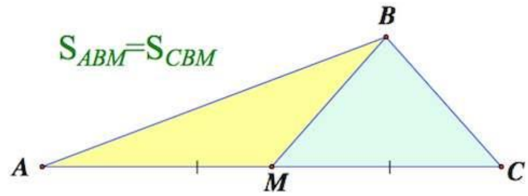


В прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы или радиусу окружности, описанной около этого треугольника.

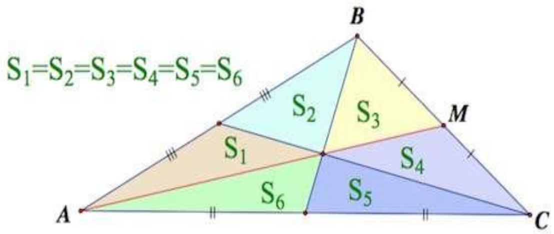


В равностороннем треугольнике длины всех медиан равны.

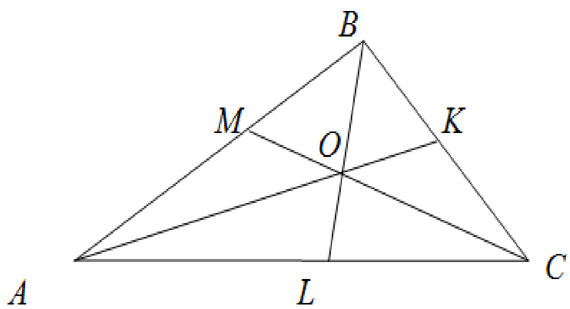
Медиана треугольника делит его на два треугольника, площади которых равны (равновеликие треугольники).



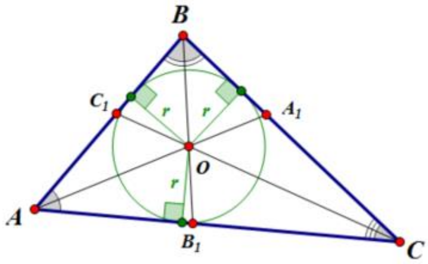
Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.



Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой треугольника.*



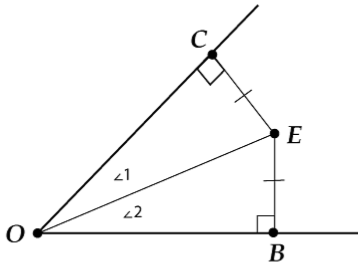
Любой треугольник имеет три биссектрисы.



Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, которая лежит внутри треугольника. Эта точка является *центром вписанной окружности.*

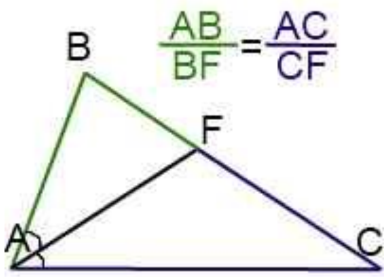
Свойства биссектрисы угла:

1. Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.



2. *(обратное утверждение)* Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

3. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.



<u>Проверяем себя.</u>

Т22. Вставьте пропущенное слово:

а) Отрезок, соединяющий вершину треугольника с _____________ противолежащей стороны, называется медианой треугольника.

б) Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий ________________ треугольника с точкой противолежащей стороны, называется биссектрисой треугольника.

в) Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется _______ треугольника.

Ответ: а) серединой; б) вершину; в) высотой.

Т23. Выберите верное утверждение

а) Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его высотой.

б) Медиана треугольника делит пополам угол, из которого проведена.

в) Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его медианой.

г) В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Ответ: г).

Т24. Выберите верное утверждение:

а) Каждая из медиан равнобедренного треугольника является его высотой.

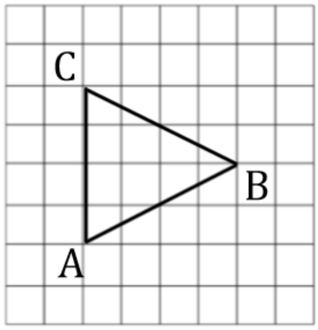
б) В прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

в) В прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, является биссектрисой и медианой.

г) Каждая из медиан равностороннего треугольника является его биссектрисой.

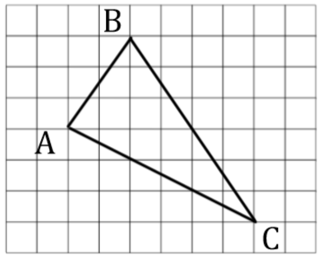
Ответ: г)

<u>Решаем задачи.</u>



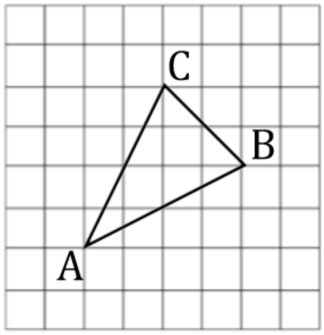
50. а) На клетчатой бумаге размером 1×1 изображен треугольник ABC. Найдите его высоту, проведенную из вершины B.

Ответ: 4



б) На клетчатой бумаге размером 1×1 изображен треугольник ABC. Найдите его биссектрису, проведенную из вершины B.

Ответ: 4



в) На клетчатой бумаге размером 1×1 изображен треугольник ABC. Найдите его медиану, проведенную из вершины C.

Ответ: 3.

51. а) Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите его высоту.

Ответ: 21

б) Высота равностороннего треугольника равна $13\sqrt{3}$. Найдите его сторону.

Ответ: 26

в) Найдите высоту равностороннего треугольника, если его периметр равен $42\sqrt{3}$.

Ответ: 21.

52. а) Треугольник ABC - равносторонний. Известно, что высота AH равна 6.

Найдите биссектрису CK.

Ответ: 6

б) Треугольник ABC - равносторонний. Известно, что высота AH равна 8.

Найдите медиану BM.

Ответ:8

в) Треугольник ABC - равносторонний. Известно, что высота AH равна 12. Найдите высоту BM.

Ответ: 12

53. а) Найдите высоту, проведенную к основанию равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 25, а основание равно 40.

Ответ: 15

б) Найдите высоту, проведенную к основанию равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 30, а основание равно 36.

Ответ:24

в) Найдите высоту, проведенную к основанию равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 26, а основание равно 20.

Ответ: 24.

54. а) Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его высота, проведенная к основанию, равна 30, а основание равно 32.

Ответ: 34

б) Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его высота, проведенная к основанию, равна 40, а основание равно 60.

Ответ:50

в) Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его высота, проведенная к основанию, равна 16, а основание равно 24.

Ответ: 20

55. а) Найдите медиану прямоугольного треугольника, проведенную к гипотенузе, если гипотенуза равна 54.

Ответ: 27

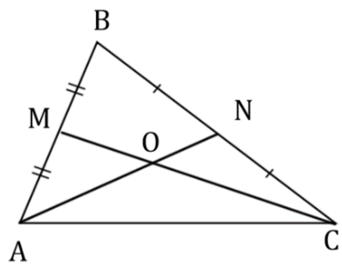
б) Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к гипотенузе, равна 32.

Ответ:64

б) Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к гипотенузе, равна 18.

Ответ: 36.

56. а) Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, AN=12, CM=18. Найдите AO.



Ответ: 8

б) Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, AN=15, CM=24. Найдите AO.

Ответ: 10

в) Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, AN=9, CM=27. Найдите AO.

Ответ: 6.

Задачи с развернутым ответом

1. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его высоты равны 3, 3 и 6.

Ответ: $\frac{4\sqrt{15}}{5}$

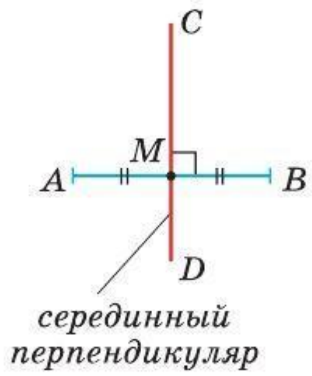
2. Биссектриса угла C равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AB в точке D. Площади треугольников ACD и BCD равны соответственно 4 и 2,5. Найдите длину основания AC треугольника ABC.

Ответ: $\frac{2\sqrt{78}}{3}$

Занятие 9. Серединный перпендикуляр, средняя линия треугольника.

Повторяем теорию.

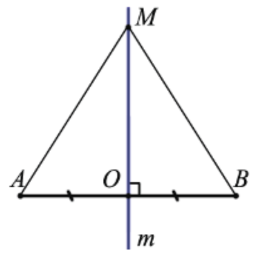
Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют *серединным перпендикуляром* к отрезку.



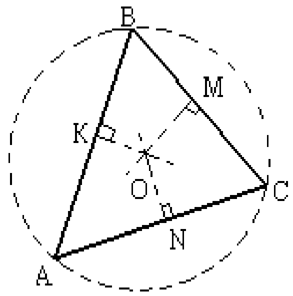
Свойства серединных перпендикуляров треугольника:

1. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

2. *(обратное утверждение)* Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

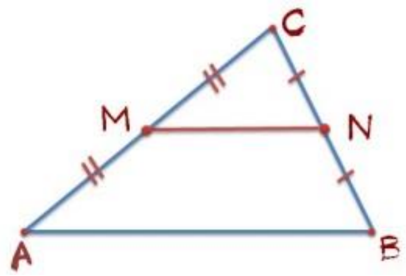


3. Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанной около этого треугольника.



Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

MN – средняя линия треугольника.



$$MN \parallel AB$$

$$MN = \frac{1}{2}AB$$

Свойство средней линии треугольника:

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

Проверяем себя.

Т25. Вставьте пропущенное слово:

а) Каждая точка серединного перпендикуляра ____________ от концов этого отрезка.

б) Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий ________ двух его сторон.

в) Средняя линия треугольника ___________ одной из его сторон и равна половине этой стороны.

г) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ___ в одной точке.

Ответ: а) равноудалена; б) середины; в) параллельна; г) пересекаются.

Т26. Выберите верное утверждение

а) Существует треугольник, в котором точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам находится на стороне треугольника.

б) Средняя линия треугольника соединяет середины всех сторон треугольника.

в) Средняя линия треугольника соединяет вершину с серединой противолежащей стороны.

Ответ: а)

Т27. Выберите верное утверждение

1) Точка, лежащая на серединном перпендикуляре к отрезку, равноудалена от концов отрезка.

2) Средняя линия треугольника делит его на равновеликие фигуры.

3) Через заданную точку плоскости можно провести только один серединный перпендикуляр к стороне треугольника.

4) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.

Ответ: 1.

Решаем задачи.

57. а) Найдите среднюю линию равностороннего треугольника, если его периметр равен 126.

Ответ: 21

б) Найдите среднюю линию равностороннего треугольника, если его периметр равен 69.

Ответ: 11,5

в) Найдите среднюю линию равностороннего треугольника, если его периметр равен 93.

Ответ: 15,5.

58. а) Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 66, сторона BC равна 37, сторона AC равна 74. Найдите MN.

Ответ:37

б) Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 8, сторона BC равна 10, сторона AC равна 12. Найдите MN.

Ответ:6

в) Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 26, сторона BC равна 39, сторона AC равна 48. Найдите MN.

Ответ:24

59. а) Периметр треугольника равен 30. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Ответ: 15

б) Периметр треугольника равен 48. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Ответ: 24

в) Периметр треугольника равен 63. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Ответ: 31,5.

60. а) Периметр треугольника ABC равен 24, DE - средняя линия треугольника, параллельная AB. Найдите периметр треугольника CDE.

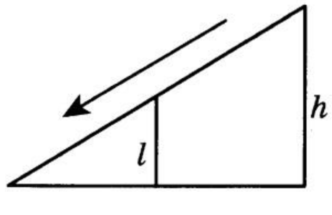
Ответ: 12

б) Периметр треугольника ABC равен 71, DE - средняя линия треугольника, параллельная AB. Найдите периметр треугольника CDE.

Ответ: 35,5

в) Периметр треугольника ABC равен 102, DE - средняя линия треугольника, параллельная AB. Найдите периметр треугольника CDE.

Ответ: 51



61. а) Столб подпирает детскую горку посередине. Найдите высоту ℓ столба, если высота h горки равна 3.

Ответ: 1,5

б) Столб подпирает детскую горку посередине. Найдите высоту ℓ столба, если высота h горки равна 4.

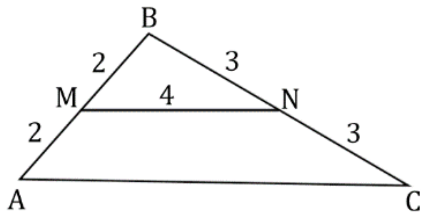
Ответ: 2

в) Столб подпирает детскую горку посередине. Найдите высоту ℓ столба, если высота h горки равна 2,2.

Ответ: 1,1.

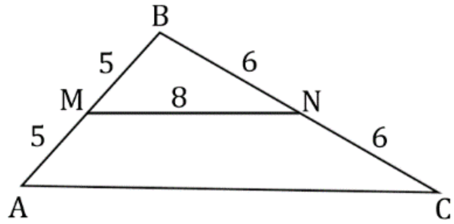
62. а) Используя данные на рисунке, найдите периметр треугольника ABC.

Ответ:18



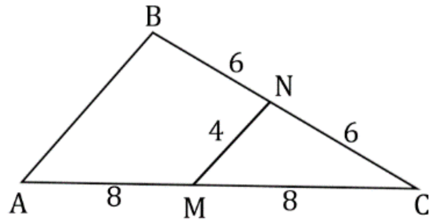
б) Используя данные на рисунке, найдите периметр треугольника ABC.

Ответ: 38



в) Используя данные на рисунке, найдите периметр треугольника ABC.

Ответ: 36.



63. а) Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите AD, если BD=5 см, AC=8,5 см.

Ответ: 3,5

б) Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите AC, если BD = 5 см, AD = 3,5 см.

Ответ: 8,5

в) Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите AD, если BD=11,4 см, AC=14,6 см.

Ответ: 3,2.

Задачи с развернутым ответом.

1.В треугольнике ABC известно, что AB = BC, AC = 10. Из середины D стороны AB проведен перпендикуляр DE к стороне AB до пересечения со стороной BC в точке E. Периметр треугольника ABC равен 40. Найдите периметр треугольника AEC.

Ответ: 25

2. Из середины гипотенузы восстановлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком, который делит угол треугольника в отношении 2:5 (меньшая часть – при гипотенузе). Найдите этот угол.

Ответ: 70°

Занятие 10. Признаки равенства треугольников

<u>Повторяем теорию.</u>

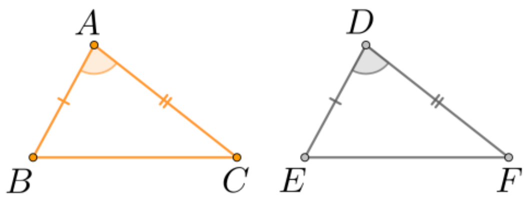
Два треугольника называются *равными*, если их можно совместить наложением.

Если два треугольника равны, то элементы (т.е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.

В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы, и обратно: против равных углов лежат равные стороны.

1. *Первый признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).*

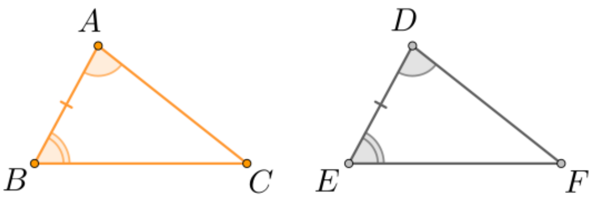
Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



если $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A = \angle D$, *то* $\Delta ABC = \Delta DEF$.

2. *Второй признак равенства треугольников (по стороне и двум прилежащим к ней углам).*

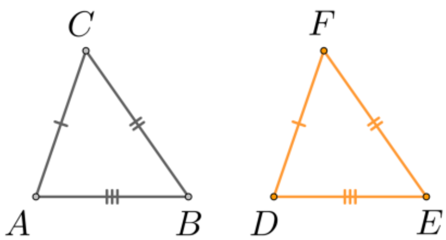
Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



если $AB = DE$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, *то* $\Delta ABC = \Delta DEF$.

3. *Третий признак равенства треугольников (по трем сторонам).*

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



если $AB = DE$, $AC = DF$, $CB = FE$, *то* $\Delta ABC = \Delta DEF$.

Проверяем себя.

Т28. Вставьте пропущенное слово:

а) Два треугольника называются равными, если их можно ____ наложением.

б) В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат ______ углы.

в) Периметры равных треугольников ________.

г) Существует ______ признака равенства треугольников.

Ответ: а) совместить; б) равные; в) равны; г) три.

Т29. Выберите верное утверждение:

а) Две геометрические фигуры называются равными, если все их стороны равны.

б) Два треугольника равны, если все их углы равны.

в) Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

г) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Ответ: г).

Т30. Выберите верное утверждение

а) Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

б) Два треугольника равны, если их можно совместить наложением.

в) Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

г) В равных треугольниках против равных углов лежат другие равные углы.

Ответ: б).

Решаем задачи.

64. а) В равных треугольниках АВС и МРК ∠А=∠М, ∠В=∠Р, ВС = 5см, АС = 4см, МР = 6 см. Найдите периметр треугольника МРК.

Ответ: 15

б) В равных треугольниках АВС и МРК ∠А=∠М, ∠В=∠Р, ВС= 10см, АС =8см, М =12 см. Найдите периметр треугольника МРК.

Ответ: 30

в) В равных треугольниках АВС и МРК ∠А=∠М, ∠В=∠Р, ВС =8см, АС =7см, МР =9 см. Найдите периметр треугольника МРК.

Ответ: 24

65. а) Равные отрезки AB и CD точкой пересечения O делятся пополам. BD =12см, CD =16см. Найдите длину отрезка AC.

Ответ: 12

б) Равные отрезки AB и CD точкой пересечения O делятся пополам. BD =10 см, CD =14 см. Найдите длину отрезка AC.

Ответ: 10

в) Равные отрезки AB и CD точкой пересечения O делятся пополам. BD =11 см, CD =18 см. Найдите длину отрезка AC.

Ответ: 11.

66. а) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, CO = DO, ∠ACO=∠BDO, AO=4 см. Найдите длину отрезка BO.

Ответ: 4

б) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, CO = DO, ∠ACO=∠BDO, AO=6 см. Найдите длину отрезка BO.

Ответ: 6

в) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, CO = DO, ∠ACO=∠BDO, AO=4,5 см. Найдите длину отрезка BO.

Ответ: 4,5.

67. а) На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и P так, что AM=CP, точка O лежит на стороне AC, углы AMO и CPO равны, AC=10см. Найдите длину отрезка CO.

Ответ: 5

б) На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и P так, что AM=CP, точка O лежит на стороне AC, углы AMO и CPO равны, AC=14см. Найдите длину отрезка CO.

Ответ: 7

в) На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и P так, что AM=CP, точка O лежит на стороне AC, углы AMO и CPO равны, AC=18см. Найдите длину отрезка CO.

Ответ: 9.

68. а) По разные стороны от прямой AC отмечены точки B и D так, что ∠BAC=∠CAD, ∠BCA=∠DCA, AB=7см, BC=9см. Найдите длину отрезка CD.

Ответ: 9

б) По разные стороны от прямой AC отмечены точки B и D так, что ∠BAC=∠CAD, ∠BCA=∠DCA, AB=10см, BC=13см. Найдите длину отрезка CD.

Ответ: 13

в) По разные стороны от прямой AC отмечены точки B и D так, что ∠BAC=∠CAD, ∠BCA=∠DCA, AB=17см, BC=19см. Найдите длину отрезка CD.

Ответ: 19.

69. а) В четырехугольнике ABCD проведена диагональ AC, AB=CD, BC=AD. Периметр треугольника ABC равен 23 см, CD=5см, BC=8см. Найдите длину диагонали AC.

Ответ: 10

б) В четырехугольнике ABCD проведена диагональ AC, AB=CD, BC=AD. Периметр треугольника ABC равен 26 см, CD=6см, BC=9см. Найдите длину диагонали AC.

Ответ: 11

в) В четырехугольнике ABCD проведена диагональ AC, AB=CD, BC=AD. Периметр треугольника ABC равен 43 см, CD=15см, BC=18см. Найдите длину диагонали AC.

Ответ: 10

70. а) В треугольниках ABC и MKE AB=MK, BC=KE, AC=ME, ∠BAC=35°, ∠BCA=73°. Найдите ∠KME.

Ответ: 35

б) В треугольниках ABC и MKE AB=MK, BC=KE, AC=ME, ∠BAC=43°, ∠BCA=65°. Найдите ∠KME.

Ответ: 43

в) В треугольниках ABC и MKE AB=MK, BC=KE, AC=ME, ∠BAC=85°, ∠BCA=65°. Найдите ∠KME.

Ответ: 85.

Задачи с развернутым ответом.

1. На сторонах угла ABC отмечены точки M и K так, что углы BMC и BKA равны, BM=BK, BA=15см, BK=8см, MC=9см. Найдите периметр треугольника COK, где O-точка пересечения отрезков AK и CM.

Ответ: 16

2. ABC и DKE- равнобедренные треугольники с основаниями AC и DE, точки M и N- середины равных сторон BC и KE. AM=DN, AC:AB=4:5, а периметр треугольника DKE равен 28 см. Найдите стороны треугольника ABC.

Ответ:10, 10, 8.

Занятие 11. Признаки равенства прямоугольных треугольников.

<u>Повторяем теорию.</u>

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

1. *(по двум катетам)* Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого треугольника, то такие треугольники равны.
2. *(по катету и прилежащему к нему острому углу)* Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.
3. *(по катету и противолежащему углу)* Если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого треугольника, то такие треугольники равны.
4. *(по гипотенузе и острому углу)* Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.
5. *(по гипотенузе и катету)* Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны.

<u>Проверяем себя.</u>

Т31. Вставьте пропущенное слово:

а) Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны _______ другого треугольника, то такие треугольники равны.

б) Если катет и прилежащий к нему ______________одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

в) Если гипотенуза и ______ одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и _______ другого, то такие треугольники равны.

г) Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника ____________ гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Ответ: а) катетам; б) острый угол; в) острый угол; острому углу; г) соответственно равны.

Т32. Выберите верное утверждение

а) Прямоугольные треугольники равны, если гипотенуза и угол одного треугольника равны гипотенузе и углу другого треугольника.

б) Прямоугольные треугольники равны, если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.

в) Прямоугольные треугольники равны, если гипотенуза и катет одного треугольника равны гипотенузе и катету другого треугольника.

г) Прямоугольные треугольники равны, если катет и угол одного треугольника равны катету и углу другого треугольника.

Ответ: в)

Т33. Выберите верное утверждение

1) Если две стороны одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум сторонам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

2) В равнобедренном прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, образует два равных прямоугольных треугольника.

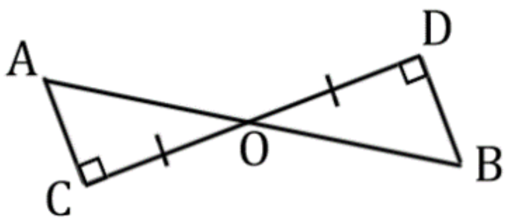
3) Если острые углы одного прямоугольного треугольника равны соответственно острым углам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны

4) Если прямоугольные треугольники имеют равные гипотенузы, то они равны.

Ответ: 2.

<u>Решаем задачи.</u>

71. а) Отрезок AB пересекает отрезок CD в его середине точке O. AC⊥CD, BD⊥CD, CD=8,2 см, AB=11,6 см. Найдите BO.



Ответ: 5,8

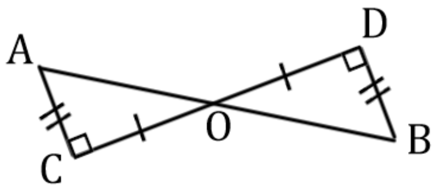
б) Отрезок AB пересекает отрезок CD в его середине точке O. AC⊥CD, BD⊥CD, CD=6,6 см, AB=9,4 см. Найдите BO.

Ответ: 4,7

в) Отрезок AB пересекает отрезок CD в его середине точке O. AC⊥CD, BD⊥CD, CD=8 см, AB=10 см. Найдите BO.

Ответ: 5

72. а) В треугольнике AOC, изображенном на рисунке, AC=3, CO=4. Найдите DO.



Ответ: 4

б) В треугольнике AOC, изображенном на рисунке, AC=5, CO=12. Найдите BD.

Ответ: 5

в) В треугольнике AOC, изображенном на рисунке, AC=10, CO=24. Найдите DO.

Ответ: 24.

73. а) В треугольнике ABC с прямым углом A и углом B, равным 30°, BC=10, а в прямоугольном треугольнике KMN гипотенуза KM=10, прилежащий к ней угол M равен 60°. Найдите MN.

Ответ: 5

б) В треугольнике ABC с прямым углом A и углом B, равным 30°, BC=16, а в прямоугольном треугольнике KMN гипотенуза KM=16, прилежащий к ней угол M равен 60°. Найдите MN.

Ответ: 8

в) В треугольнике ABC с прямым углом A и углом B, равным 30°, BC=12, а в прямоугольном треугольнике KMN гипотенуза KM=12, прилежащий к ней угол M равен 60°. Найдите MN.

Ответ: 6.

74. а) Из точки D, лежащей на биссектрисе угла BAC, опущены перпендикуляры к сторонам AB и AC. Расстояние от точки D до прямой AC равно 7,4 см, AC=18,6. Найдите длину перпендикуляра, проведенного к стороне AB.

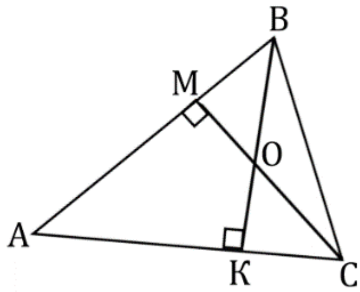
Ответ: 7,4

б) Из точки D, лежащей на биссектрисе угла BAC, опущены перпендикуляры к сторонам AB и AC. Расстояние от точки D до прямой AC равно 3,4 см, AC=8,6. Найдите длину перпендикуляра, проведенного к стороне AB.

Ответ: 3,4

в) Из точки D, лежащей на биссектрисе угла BAC, опущены перпендикуляры к сторонам AB и AC. Расстояние от точки D до прямой AC равно 5,1 см, AC=20,2. Найдите длину перпендикуляра, проведенного к стороне AB.

Ответ: 5,1



75. а) ∠ABC=∠ACB, AK=8 см, MB=2 см, BC=6 см. Найдите периметр треугольника ABC.

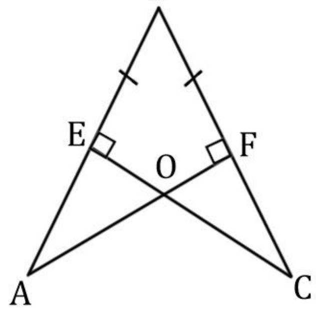
Ответ: 26

б) ∠ABC=∠ACB, AK=6 см, MB=3 см, BC=5 см. Найдите периметр треугольника ABC.

Ответ: 23

в) ∠ABC=∠ACB, AK=10 см, MB=3 см, BC=8 см. Найдите периметр треугольника ABC.

Ответ: 34



76. а) По изображению на рисунке найдите CB, если AB=10.

Ответ: 10

б) По изображению на рисунке найдите CB, если AB=17.

Ответ: 17

в) По изображению на рисунке найдите CB, если AB=13.

Ответ: 13

77. а) По изображению на рисунке найдите CF, если AE=4.

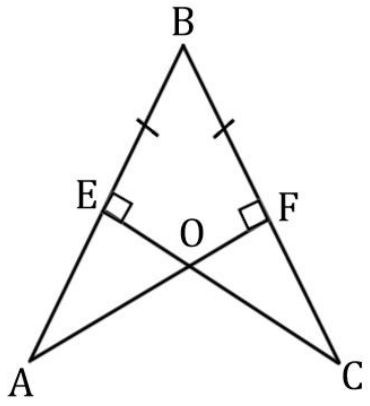
Ответ: 4

б) По изображению на рисунке найдите CF, если AE=9,5.

Ответ: 9,5

в) По изображению на рисунке найдите CF, если AE=14.

Ответ: 14.



<u>Задачи с развернутым ответом.</u>

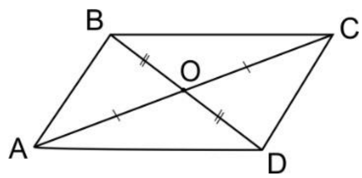
<u>1.</u> Биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, равна 5. Периметр одного из образованных треугольников равен 30. Найдите периметр данного равнобедренного треугольника.

Ответ: 50

<u>2.</u> Докажите, что если середина высоты треугольника равноудалена от концов стороны, к которой она проведена, то треугольник равнобедренный.

Занятие 12. Диагонали и высоты в параллелограмме, ромбе, прямоугольнике, квадрате, трапеции.

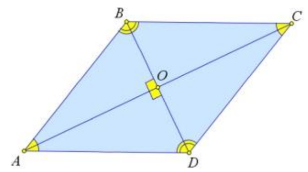
<u>Повторяем теорию</u>



Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

AC ⋂ BD = O ,

AO = OC, BO = OD.



Диагонали ромба пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

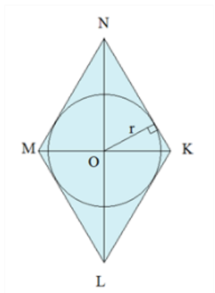
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

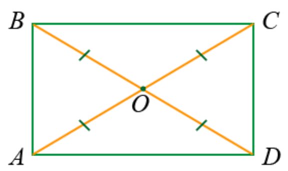
AC ⋂ BD = O , AO = OC, BO = OD

$AC \perp BD$

AC и BD – биссектрисы.



Точка пересечения диагоналей ромба является центром вписанной окружности.

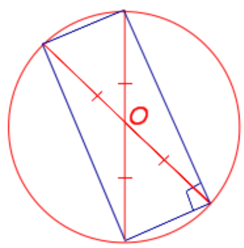


Диагонали прямоугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

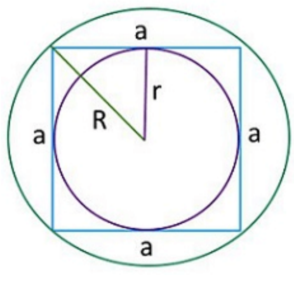
Диагонали прямоугольника равны.

AC ⋂ BD = O , AC = BD ,

AO = OC = BO = OD.



Точка пересечения диагоналей прямоугольника является центром описанной окружности.



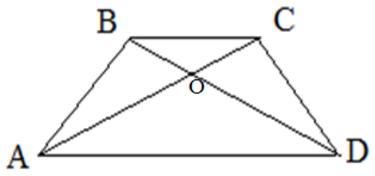
Диагонали квадрата пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Диагонали квадрата равны.

Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.

Диагонали квадрата являются биссектрисами его углов.

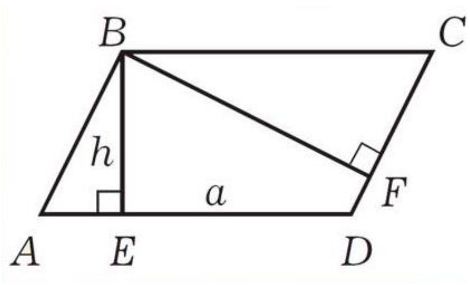
Точка пересечения диагоналей квадрата является центром вписанной и описанной окружности.



Диагонали трапеции пересекаются.

$AC \cap BD = O$.

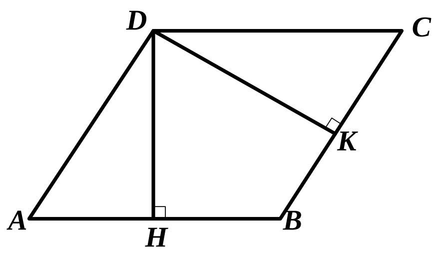
Если трапеция равнобокая, то ее диагонали равны.



Высота параллелограмма – это перпендикуляр, проведенный из любой точки одной из стороны параллелограмма к прямой, содержащей противоположную сторону.

Из каждой вершины параллелограмма можно провести две высоты.

Высота, проведенная к большей стороне, имеет меньшую длину, а высота, проведенная к меньшей стороне, имеет большую длину.



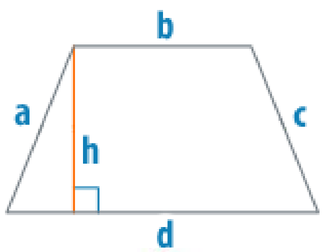
Высота ромба – это перпендикуляр, проведенный из любой точки одной из стороны ромба к прямой, содержащей противоположную сторону.

Из каждой вершины ромба можно провести две высоты.

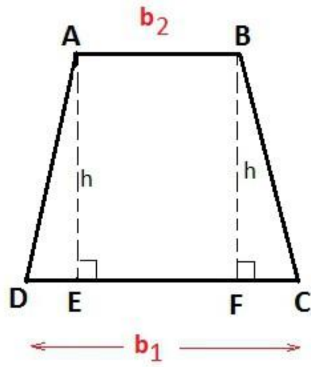
Высоты ромба равны ($DH=DK$).

В прямоугольнике каждая сторона является его высотой.

В квадрате каждая сторона является его высотой.



Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание.



Если трапеция равнобокая, то высоты, проведенные из вершин меньшего основания, отсекают равные прямоугольные треугольники.

Δ ADE = Δ BCF.

Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота трапеции равна длине ее средней линии.

<u>Проверяем себя.</u>

Т34. Вставьте пропущенное слово:

а) Диагонали ромба взаимно ______________.

б) Диагонали прямоугольника ______________.

в) Диагонали __________ трапеции равны.

г) В ромбе все высоты ______________.

Ответ: а) перпендикулярны; б) равны; в) равнобокой; г) равны.

Т35. Выберите верное утверждение

а) Диагонали параллелограмма являются биссектрисами его углов.

б) Диагонали ромба равны.

в) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

г) Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.

Ответ: в).

Т36. Выберите верные утверждения:

а) Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

б) Если в выпуклом четырехугольнике диагональ делит его на два равных треугольника, то он является параллелограммом.

в) В трапеции диагональ делит её на два равных треугольника.

г) Четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, является ромбом.

Ответ: а), г).

<u>Решаем задачи.</u>

78. а) Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 12.

Ответ: 72

б) Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 15.

Ответ: 90

в) Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 22.

Ответ: 132

79. а) В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 12, а от большей стороны на 15. Найдите периметр прямоугольника.

Ответ: 108

б) В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 7, а от большей стороны на 10. Найдите периметр прямоугольника.

Ответ: 68

в) В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 3, а от большей стороны на 9. Найдите периметр прямоугольника.

Ответ: 48

80. а) Основания трапеции равны 11 и 18. Диагональ трапеции делит среднюю линию на два отрезка. Найдите длину большего из них.

Ответ: 9

б) Основания трапеции равны 4 и 10. Диагональ трапеции делит среднюю линию на два отрезка. Найдите длину большего из них.

Ответ: 5

в) Основания трапеции равны 6 и 12. Диагональ трапеции делит среднюю линию на два отрезка. Найдите длину большего из них.

Ответ: 6

81. а) Найдите периметр квадрата, если расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его стороны 12.

Ответ: 96

б) Найдите периметр квадрата, если расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его стороны 10.

Ответ: 80

в) Найдите периметр квадрата, если расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его стороны 15.

Ответ: 120

82. а) Сторона ромба равна 4, а один из углов этого ромба равен 150°. Найдите высоту этого ромба.

Ответ: 2

б) Сторона ромба равна 7, а один из углов этого ромба равен 150°. Найдите высоту этого ромба.

Ответ: 3,5

в) Сторона ромба равна 12, а один из углов этого ромба равен 150°. Найдите высоту этого ромба.

Ответ: 6

83. а) Сторона ромба равна 28, а острый угол равен 60°. Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков?

Ответ: 14; 14

б) Сторона ромба равна 34, а острый угол равен 60°. Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков?

Ответ: 17; 17

в) Сторона ромба равна 40, а острый угол равен 60°. Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков?

Ответ: 20; 20

84. а) В равнобедренной трапеции диагональ является биссектрисой острого угла. Периметр трапеции равен 14 см, а большее основание - 5 см. Найдите меньшее основание.

Ответ: 3

б) В равнобедренной трапеции диагональ является биссектрисой острого угла. Периметр трапеции равен 23 см, а большее основание - 8 см. Найдите меньшее основание.

Ответ: 5.

в) В равнобедренной трапеции диагональ является биссектрисой острого угла. Периметр трапеции равен 36 см, а большее основание – 12 см. Найдите меньшее основание.

Ответ: 8

Задачи с развернутым ответом.

1. В трапеции ABCD боковые сторон AB и CD равны, CH – высота, проведенная к большему основанию AD. Найдите длину отрезка HD, если средняя линия KM трапеции равна 16, а меньшее основание BC равно 4.

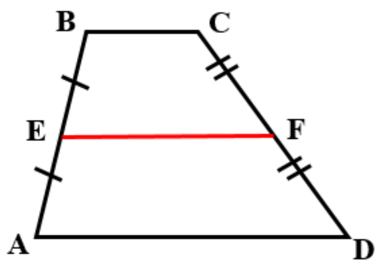
Ответ: 12

2. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 19, а одна из диагоналей ромба 76. Найдите все углы ромба.

Ответ: 60°,60°,120°,120°

Занятие 13. Средняя линия трапеции.

Повторяем теорию.



Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

$AE = BE$, $DF = CF$,

EF – средняя линия трапеции

Свойства средней линии трапеции:

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

$$EF \parallel AD \parallel BC, \quad EF = \frac{BC + AD}{2}.$$

Проверяем себя.

Т37. Вставьте пропущенное слово:

а) Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её ____________ сторон.

б) Трапеция называется __________, если её боковые стороны равны.

в) Параллельные стороны трапеции называются __________.

г) Средняя линия трапеции ____________ основаниям и равна их _________.

Ответ: а) боковых; б) равнобедренной; в) основаниями; г) параллельна; полусумме.

Т38. Выберите верное утверждение

а) Средняя линия трапеции равна полусумме оснований.

б) Средняя линия трапеции – отрезок, соединяющий середины оснований.

в) Средняя линия трапеции равна полусумме боковых сторон.

г) Средняя линия трапеции равна сумме её оснований.

Ответ: а).

Т39. Выберите верное утверждение

а) Средняя линия трапеции - перпендикуляр, проходящий через середину верхнего основания

б) Средняя линия трапеции перпендикулярна основаниям.

в) Средняя линия трапеции параллельна основаниям.

г) Средняя линия трапеции параллельна одной из боковых сторон.

Ответ: в).

Решаем задачи.

85. а) Одно из оснований трапеции равно 17, а средняя линия равна 10. Найдите другое основание трапеции.

Ответ: 3

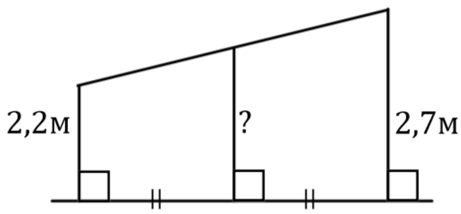
б) Одно из оснований трапеции равно 14, а средняя линия равна 11. Найдите другое основание трапеции.

Ответ: 8

в) Одно из оснований трапеции равно 5, а средняя линия равна 6. Найдите другое основание трапеции.

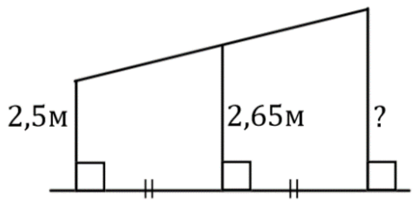
Ответ: 7.

86. а) Наклонная крыша установлена на трех вертикальных опорах, основания которых расположены на одной прямой. Средняя опора стоит посередине между малой и большой опорами (см. рисунок). Высота малой опоры 2,2 м, высота большой опоры 2,7 м. Найдите высоту средней опоры. Ответ дайте в метрах.



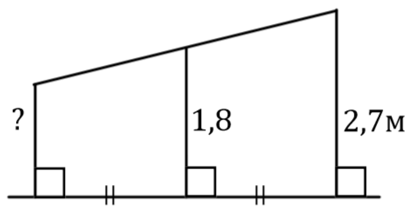
Ответ: 2,45

б) Наклонная крыша установлена на трех вертикальных опорах, основания которых расположены на одной прямой. Средняя опора стоит посередине между малой и большой опорами (см. рисунок). Высота малой опоры 2,5 м, высота средней опоры 2,65 м. Найдите высоту большой опоры. Ответ дайте в метрах.



Ответ: 2,8

в) Наклонная крыша установлена на трех вертикальных опорах, основания которых расположены на одной прямой. Средняя опора стоит посередине между малой и большой опорами (см. рисунок). Высота средней опоры 1,8 м, высота большой опоры 2,7 м. Найдите высоту малой опоры. Ответ дайте в метрах.



Ответ: 0,9.

87. а) Концы отрезка АВ лежат по одну сторону от прямой m. Расстояние от точки А до прямой m равно 24, а расстояние от точки В до прямой m равно 62. Найдите расстояние от середины отрезка АВ до прямой m.

Ответ: 43

б) Концы отрезка АВ лежат по одну сторону от прямой m. Расстояние от точки А до прямой m равно 34, а расстояние от точки В до прямой m равно 46. Найдите расстояние от середины отрезка АВ до прямой m.

Ответ: 40

в) Концы отрезка АВ лежат по одну сторону от прямой m. Расстояние от точки А до прямой m равно 16, а расстояние от точки В до прямой m равно 24. Найдите расстояние от середины отрезка АВ до прямой m.

Ответ: 20.

88. а) Основание ВС равнобедренной трапеции ABCD равно 8 см, боковая сторона CD равна 14 см, ∠D=60°. Найдите длину средней линии трапеции.

Ответ: 15

б) Основание ВС равнобедренной трапеции ABCD равно 10 см, боковая сторона CD равна 18 см, ∠D=60°. Найдите длину средней линии трапеции.

Ответ: 19

в) Основание ВС равнобедренной трапеции ABCD равно 12 см, боковая сторона CD равна 16 см, ∠D=60°. Найдите длину средней линии трапеции.

Ответ: 20.

89. а) Дана трапеция ABCD с основаниями AB и CD, FG – средняя линия. AB =8 см, BC=13 см, CD =10 см, AD= 19 см. Найдите периметр трапеции AFGB.

Ответ: 33

б) Дана трапеция ABCD с основаниями AB и CD, FG – средняя линия. AB =10 см, BC=15 см, CD =12 см, AD =21 см. Найдите периметр трапеции AFGB.

Ответ: 39

в) Дана трапеция ABCD с основаниями AB и CD, FG – средняя линия. AB =6 см, BC = 11 см, CD =8 см, AD =17 см. Найдите периметр трапеции AFGB.

Ответ: 27

90. а) В трапеции ABCD с основаниями AD=12 см и BC=8 см проведена средняя линия ML, которая пересекает диагональ AC в точке К. Найдите длину отрезка МК, если M∈ AB, L ∈ CD.

Ответ: 4

б) В трапеции ABCD с основаниями AD=12 см и BC=8 см проведена средняя линия ML, которая пересекает диагональ AC в точке К. Найдите длину отрезка KL, если M∈ AB, L ∈ CD.

Ответ: 6

в) В трапеции ABCD с основаниями AD=17 см и BC=10 см проведена средняя линия ML, которая пересекает диагональ AC в точке К. Найдите длину отрезка KL, если M∈ AB, L ∈ CD.

Ответ: 8,5.

91. а) Площадь трапеции равна 42 $см^2$, высота равна 3 см. Найдите длину средней линии.

Ответ: 14

б) Площадь трапеции равна 35 $см^2$, высота равна 5 см. Найдите длину средней линии.

Ответ: 7

в) Площадь трапеции равна 165 $см^2$, высота равна 11 см. Найдите длину средней линии.

Ответ: 15.

Задачи с развернутым ответом.

1. В равнобедренной трапеции диагональ, равная 4 см, составляет с основанием угол в 60°. Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ: 2.

2. В трапеции ABCD угол при вершине A прямой, а угол при вершине D равен 30°. Окружность, центр которой лежит на стороне AD, касается прямых AB, BC, CD. Найдите радиус окружности, если средняя линия трапеции равна $6-\sqrt{3}$.

Ответ: 2.

Занятие 14. Проверочная работа по теме «Углы. Линии в треугольнике, четырехугольнике и окружности».

К занятию представлен один тренировочный вариант, который есть в пособии для обучающихся (его можно дать в качестве домашнего задания), и два основных варианта. В каждом варианте предлагаются по 3 теоретических вопроса и 7 задач базового уровня сложности, по типу предлагаемых на ОГЭ по математике. Также представлены 2 дополнительные, более сложные задачи.

Тренировочный вариант.

Проверим себя.

Т40. Вставьте пропущенное слово:

а) Два угла называются __________, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

б) В равнобедренном треугольнике углы __________ равны.

в) Биссектрисы смежных углов взаимно ___________.

г) Если две параллельные прямые пересечены секущей, то ___________ углы равны, ____________ углы равны, а сумма ____________ углов равна 180°.

Ответ: а) вертикальными; б) при основании; в) перпендикулярны; г) накрест лежащие, соответственные; односторонних.

Т41. Выберите верное утверждение:

а) Если два угла равны, то они вертикальные.

б) Любой вписанный угол окружности равен половине любого её центрального угла.

в) Все углы ромба- острые.

г) Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним.

Ответ: г)

Т42. Выберите верное утверждение:

1) Медиана всегда делит пополам один из углов треугольника.

2) Высота треугольника может находиться вне треугольника.

3) Существует треугольник, стороны которого равны 1, 2, 3.

4) Любой равнобедренный треугольник является равносторонним.

Ответ: 2.

Решаем задачи.

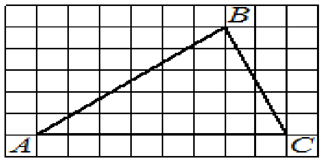
92. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых в 4 раза больше другого. Найдите эти углы. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 36 и 144

93. В треугольнике ABC угол C равен 101°. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах

Ответ. 79.

94. На клетчатой бумаге размером клетки 1x1 изображен треугольник ABC. Найдите длину средней линии треугольника, параллельной стороне AC.



Ответ: 4.

95. Две прямые пересечены третьей. Один из накрест лежащих углов равен 61°, другой-59°. На сколько градусов нужно увеличить меньший угол, чтобы прямые стали параллельными?

Ответ: 2

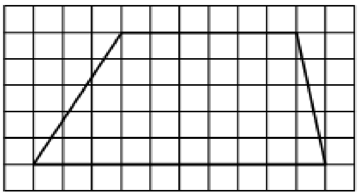
96. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 37°. Найдите больший из углов, на которые высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол.

Ответ: 53

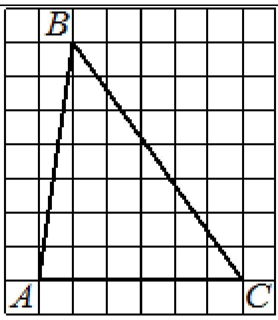
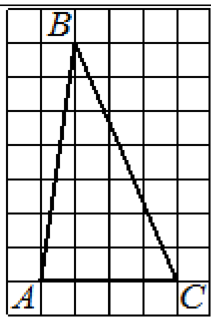
97. В треугольнике ABC провели среднюю линию DE, параллельную стороне AB. Периметр треугольника CDE равен 27. Найдите периметр треугольника ABC.

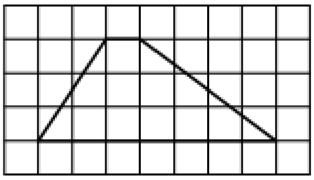
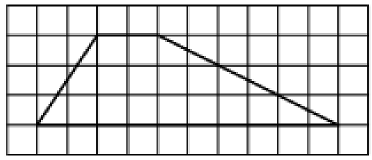
Ответ: 54.

98. На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображена трапеция. Найдите длину ее средней линии.



Ответ: 8.

Вариант 1	Вариант 2
1. Какое из следующих утверждений верно? 1) В равностороннем треугольнике все медианы равны. 2) Смежные углы всегда равны. 3) Боковые стороны любой трапеции равны.	**1.** Какое из следующих утверждений верно? 1) Сумма углов любого треугольника 180°. 2) Если угол острый, то смежный с ним угол тоже острый. 3)Любые две прямые имеют ровно одну общую точку.
2. Какое из следующих утверждений верно? 1) Если в параллелограмме диагонали равны и перпендикулярны, то он является квадратом. 2) В параллелограмме смежные стороны равны. 3) Средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.	**2.** Какое из следующих утверждений верно? 1) Вертикальные углы равны. 2) Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника являются высотой. 3) Диагонали трапеции пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
3. Какое из следующих утверждений верно? 1) Все углы равнобедренного треугольника равны между собой. 2) Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. 3) В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна сумме длин катетов.	**3.** Какое из следующих утверждений верно? 1) Если в ромбе один из углов равен 90°, то этот ромб является квадратом. 2) В равностороннем треугольнике каждая биссектриса делит противоположную сторону пополам. 3) Все углы ромба равны.
4. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых в 2 раза больше другого. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.	**4.** Один из углов, образованных при пересечении двух прямых в 3 раза больше другого. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.
5. В треугольнике ABC угол C равен 159°. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.	**5.** В треугольнике ABC угол C равен 168°. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.
6. На клетчатой бумаге размером клетки 1x1 изображен треугольник ABC. Найдите длину средней линии треугольника, параллельной стороне AC. 	**6**. На клетчатой бумаге размером клетки 1x1 изображен треугольник ABC. Найдите длину средней линии треугольника, параллельной стороне AC. 
7.Две прямые пересечены третьей. Один из накрест лежащих углов равен 67°, другой-55°. На сколько градусов нужно	**7.**Две прямые пересечены третьей. Один из накрест лежащих углов равен 85°, другой-71°. На сколько градусов нужно

увеличить меньший угол, чтобы прямые стали параллельными?	увеличить меньший угол, чтобы прямые стали параллельными?
8.В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 48°. Найдите больший из углов, на которые высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол.	**8**.В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 25°. Найдите больший из углов, на которые высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол.
9. В треугольнике ABC провели среднюю линию KM, параллельную стороне AB. Периметр треугольника CKM равен 17. Найдите периметр треугольника ABC	**9.** В треугольнике ABC провели среднюю линию DM, параллельную стороне AB. Периметр треугольника CDM равен 16. Найдите периметр треугольника ABC
10.На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображена трапеция. Найдите длину ее средней линии. 	**10.**На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображена трапеция. Найдите длину ее средней линии. 

<u>Дополнительные задачи.</u>

1. Периметр равнобедренного треугольника в пять раз больше основания и на 9 см больше боковой стороны. Найдите боковую сторону треугольника.

2. В треугольнике ABC угол A меньше угла B на 100°, а внешний угол при вершине A больше внешнего угла при вершине B в три раза. Найдите наибольшую разность двух внешних углов треугольника ABC.

Ответы.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Вариант 1	1	13или 31	2	60	21	3	12	48	34	4
Вариант 2	1	1	12 или 21	45	12	2	14	65	32	6

Ответы на дополнительные задачи.

1. 6 см
2. 110°

Занятие 15. Отрезки, связанные с окружностью.
Хорда, диаметр, радиус.

Повторяем теорию.

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки. Данная точка называется *центром окружности*, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, - *радиусом окружности.*

У любой окружности бесконечно много радиусов и все они имеют одинаковую длину.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ее *хордой*.

Хорда, проходящая через центр окружности, называется ее *диаметром*.

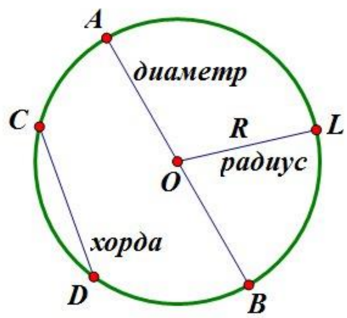
У любой окружности бесконечно много диаметров.

O – центр окружности

OA = OB = OL = R – радиусы окружности

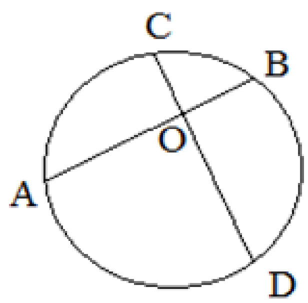
CD – хорда

AB – диаметр



Свойство пересекающихся хорд. Если две хорды пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD$$



Проверяем себя.

Т43. Вставьте пропущенное слово:

а) Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо точкой окружности, называется _________ окружности.

б) Хорда – отрезок, соединяющий ___________ окружности.

в) Расстояния от центра окружности до равных хорд ______.

г) Центр окружности является _____________ любого диаметра.

Ответ: а) радиусом; б) две точки; в) равны; г) серединой.

Т44. Выберете верное утверждение:

а) Все хорды окружности равны между собой.

б) Все диаметры окружности равны между собой.

в) Две окружности пересекаются, если радиус одной окружности больше радиуса другой окружности.

г) Равные хорды параллельны.

Ответ: б).

Т45. Выберете верное утверждение:

а) Если концы хорды соединить с центром окружности, получится равносторонний треугольник.

б) Параллельные хорды равны.

в) Диаметром называется отрезок, проходящий через центр окружности.

г) Для точки, лежащей на окружности, расстояние до центра окружности равно радиусу.

Ответ: г

<u>Решаем задачи.</u>

99. а) Точки А и К лежат на окружности с центром в точке О и радиусом 3 см. $\angle AOK=60°$. Найдите длину хорды АК.

Ответ: 3

б) Точки А и К лежат на окружности с центром в точке О и радиусом 5 см. $\angle AOK=60°$. Найдите длину хорды АК.

Ответ: 5

в) Точки А и К лежат на окружности с центром в точке О и радиусом 7 см. $\angle AOK=60°$. Найдите длину хорды АК.

Ответ: 7.

100. а) Диаметр АВ окружности радиусом 6 см образует с хордой АК угол 45°. Найдите расстояние от точки К до прямой АВ.

Ответ: 6

б) Диаметр АВ окружности радиусом 16 см образует с хордой АК угол 45°. Найдите расстояние от точки К до прямой АВ.

Ответ: 16

в) Диаметр АВ окружности радиусом 9 см образует с хордой АК угол 45°. Найдите расстояние от точки К до прямой АВ.

Ответ: 9.

101. а) Хорда АВ равна 18 см. ОА и ОВ – радиусы окружности, причем угол АОВ равен 90°. Найдите расстояние от точки О до хорды АВ.

Ответ: 9.

б) Хорда AB равна 14 см. OA и OB – радиусы окружности, причем угол AOB равен 90°. Найдите расстояние от точки O до хорды AB.

Ответ: 7.

в) Хорда AB равна 13 см. OA и OB – радиусы окружности, причем угол AOB равен 90°. Найдите расстояние от точки O до хорды AB.

Ответ: 6,5.

102. а) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Найдите MA, если MB=3 см, MC=4 см, MD=9 см.

Ответ: 12.

б) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Найдите MA, если MB=8 см, MC=6 см, MD=4 см.

Ответ: 3.

в) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Найдите MA, если MB=3 см, MC=6 см, MD=8 см.

Ответ: 16.

103. а) Найдите расстояние от центра окружности, радиус которой равен 13 см, до её хорды, длина которой равна 10 см.

Ответ: 12.

б) Найдите расстояние от центра окружности, радиус которой равен 15 см, до её хорды, длина которой равна 18 см.

Ответ: 12.

в) Найдите расстояние от центра окружности, радиус которой равен 26 см, до её хорды, длина которой равна 48 см.

Ответ: 10.

104. а) Расстояние от центра окружности, радиус которой равен 29 см, до её хорды равно 21 см. Найдите длину хорды.

Ответ:40.

б) Расстояние от центра окружности, радиус которой равен 20 см, до её хорды равно 16 см. Найдите длину хорды.

Ответ: 24.

в) Расстояние от центра окружности, радиус которой равен 26 см, до её хорды равно 10 см. Найдите длину хорды.

Ответ: 48.

105. а) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если AB=16, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны 15 и 8 соответственно.

Ответ: 30.

б) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние до центра окружности до хорды CD, если AB=30, CD=40, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 20.

Ответ:15

в) Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние до центра окружности до хорды CD, если AB=6, CD=8, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 4.

Ответ: 3.

Задачи с развернутым ответом.

1. Окружность радиуса 12 см касается внешним образом второй окружности в точке C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает первую окружность в точке A, а вторую окружность – в точке B. Найдите радиус второй окружности, если AC=6 см, BC=7 см.

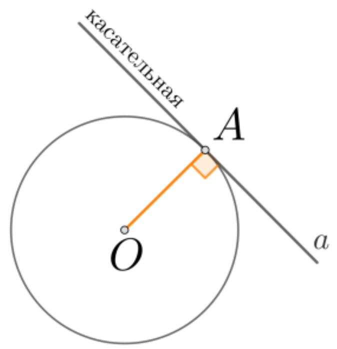
Ответ: 14.

2. Расстояние между центрами двух пересекающихся окружностей равно 44 см. Радиусы окружностей равны 17 см и 39 см. Найдите длину общей хорды окружностей.

Ответ:30.

Занятие 16. Прямые, связанные с окружностью. Касательная, секущая.

<u>Повторяем теорию</u>

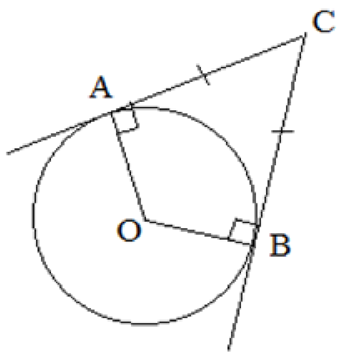


Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной* к окружности, а их общая точка называется *точкой касания* прямой и окружности.

А – точка касания

Свойство касательной: касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. А ⊥ а

Признак касательной: если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

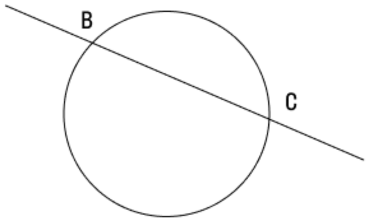


Отрезки АВ и АС называются *отрезками касательных*, проведенных из точки А.

Свойство отрезков касательных.

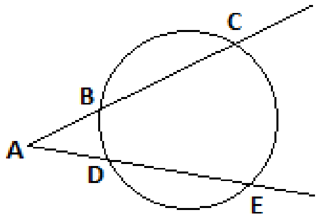
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

АС = СВ, ∠АСО = ∠ВСО.



Секущая к окружности – это прямая, пересекающая окружность в двух точках.

ВС – секущая



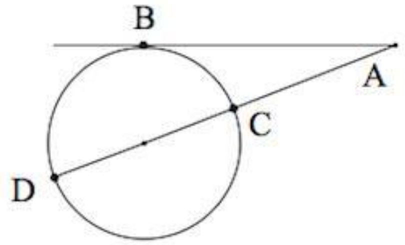
Свойство: если через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на ее внешнюю часть равно произведению другой секущей на ее внешнюю часть.

$$AC \cdot AB = AE \cdot AD$$

Свойство секущей и касательной:

*е*сли через точку, лежащую вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

$$AB^2 = AC \cdot AD$$



Проверяем себя.

Т46. Вставьте пропущенное слово:

а) Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется _____________ к окружности.

б) Касательная к окружности ______________ к радиусу, проведенному в точку касания.

в) Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, _____ и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

г) Если через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на ее ____________ равно произведению другой секущей на ее ____________.

Ответ: а) касательной; б) перпендикулярна; в) равны; г) внешнюю часть; внешнюю часть.

Т47. Выберите верное утверждение

а) Касательная к окружности параллельна радиусу, проведенному в точку касания.

б) Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

в) Если через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, то произведение отрезков одной секущей равно произведению отрезков другой секущей.

г) Радиус перпендикулярен касательной окружности

Ответ: б)

Т48. Выберите верное утверждение

а) Через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести две касательные к этой окружности.

б) Если угол между радиусом и прямой, проведенной через его конец, лежащий на окружности, тупой, то прямая не пересекает окружность.

в) Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к радиусу, то она является секущей.

г) Касательной называется прямая, имеющая с окружностью общую точку.

Ответ: а)

<u>**Решаем задачи.**</u>

106. а) Через точку А окружности с центром О проведена касательная АВ. Найдите радиус окружности, если ОВ=6 см, $\angle AOB = 60°$.

Ответ: 3

б) Через точку А окружности с центром О проведена касательная АВ. Найдите радиус окружности, если ОВ=16 см, $\angle AOB = 60°$.

Ответ: 8

в) Через точку А окружности с центром О проведена касательная АВ. Найдите радиус окружности, если ОВ=14 см, $\angle AOB = 60°$.

Ответ: 7.

107. а) Отрезки касательных АВ и ВС, проведенных из точки В к окружности с центром в точке О, образуют угол, равный 60°, ОВ=28 см. Найдите длину отрезка АО.

Ответ: 14

б) Отрезки касательных АВ и ВС, проведенных из точки В к окружности с центром в точке О, образуют угол, равный 60°, ОВ=20 см. Найдите длину отрезка АО.

Ответ: 10

в) Отрезки касательных АВ и ВС, проведенных из точки В к окружности с центром в точке О, образуют угол, равный 60°, ОВ=18 см. Найдите длину отрезка АО.

Ответ: 9.

108. а) Прямая СВ касается окружности с центром в точке А и радиусом 4 см в точке В. Найдите расстояние АС, если ВС=3 см.

Ответ: 5

б) Прямая СВ касается окружности с центром в точке А и радиусом 5 см в точке В. Найдите расстояние АС, если ВС=12 см.

Ответ: 13

в) Прямая СВ касается окружности с центром в точке А и радиусом 6 см в точке В. Найдите расстояние АС, если ВС=8 см.

Ответ: 10.

109. а) Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB=4, AC=64. Найдите AK.

Ответ: 16

б) Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB=6, AC=54. Найдите AK.

Ответ: 18

в) Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB=2, AC=8. Найдите AK.

Ответ: 4.

110. а) Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB=2, BC=6. Найдите AK.

Ответ: 4.

б) Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB=2, BC=16. Найдите AK.

Ответ: 6.

в) Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB=4, BC=12. Найдите AK.

Ответ: 8.

111. а) Через точку A, лежащую вне окружности с центром в точке O, проведены две касательные AM и AK. AM=10, $\angle MAO = 30°$. Найдите расстояние между точками M и K.

Ответ: 10.

б) Через точку A, лежащую вне окружности с центром в точке O, проведены две касательные AM и AK. AM=22, $\angle MAO = 30°$. Найдите расстояние между точками M и K.

Ответ: 22.

в) Через точку A, лежащую вне окружности с центром в точке O, проведены две касательные AM и AK. AM=17, $\angle MAO = 30°$. Найдите расстояние между точками M и K.

Ответ: 17.

112. а) Прямая AB – касательная к окружности с центром в точке O. AB=2 см, $\angle AOB = 45°$. Найдите радиус OA.

Ответ: 2.

б) Прямая AB – касательная к окружности с центром в точке O. AB=15 см, $\angle AOB = 45°$. Найдите радиус OA.

Ответ: 15.

в) Прямая AB – касательная к окружности с центром в точке O. AB=23 см, $\angle AOB = 45°$. Найдите радиус OA.

Ответ: 23.

<u>Задачи с развернутым ответом.</u>

<u>1.</u> Из одной точки проведены к окружности касательная и секущая. Секущая равна 10 см, а её внутренний отрезок больше внешнего на длину касательной. Найдите длину касательной.

Ответ: 5 см.

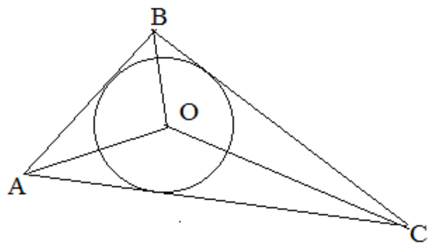
<u>2.</u> Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 15, а AB=4.

Ответ: 16.

Занятие 17. Вписанная в треугольник окружность.

<u>Повторяем теорию.</u>

Если все стороны треугольника касаются окружности, то окружность называется *вписанной в треугольник*, а треугольник называется *описанным* около этой окружности.



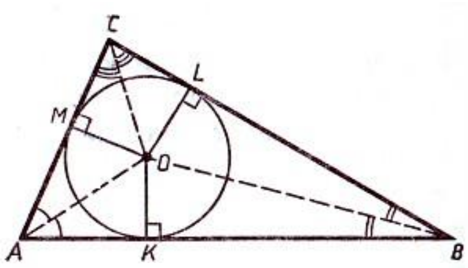
В любой треугольник можно вписать окружность и только одну.

Центр вписанной окружности в треугольник – это точка пересечения биссектрис треугольника.

O – центр окружности,

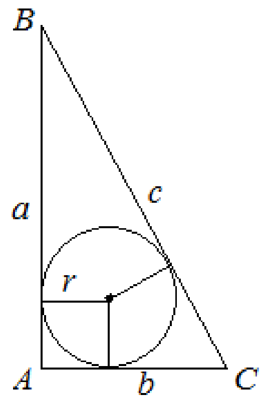
AO, BO, CO – биссектрисы улов

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности $\boldsymbol{S = p \cdot r}$.



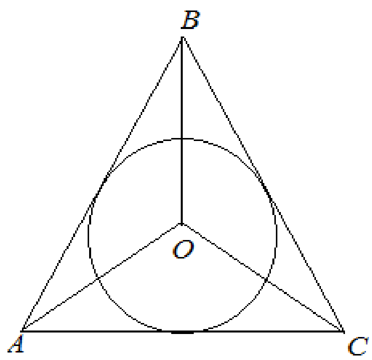
Если треугольник прямоугольный, то

$$\boldsymbol{r = \frac{a+b-c}{2}}\ .$$



Если треугольник равносторонний, то

$\boldsymbol{r = \frac{1}{3}h}$, где $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$ или $\boldsymbol{r = \frac{a}{2\sqrt{3}}}$.



Проверяем себя.

Т49. Вставьте пропущенное слово:

а) Если все стороны треугольника ___________ окружности, то окружность называется вписанной в треугольник.

б) Площадь треугольника равна произведению его ____________ на радиус вписанной в него окружности.

в) Центр вписанной окружности в треугольник – это точка пересечения ____________ треугольника.

Ответ: а) касаются; б) полупериметра; в) биссектрис.

Т50. Выберите верное утверждение

а) Центр вписанной в треугольник окружности совпадает с точкой пересечения его биссектрис.

б) Центр вписанной в равнобедренный треугольник окружности совпадает с точкой пересечения его медиан.

в) Центр вписанной в треугольник окружности совпадает с точкой пересечения его высот.

г) Центр вписанной в треугольник окружности совпадает с точкой пересечения его серединных перпендикуляров.

Ответ: а)

Т51. Выберите верное утверждение

1) Окружность называется вписанной в треугольник, если все вершины треугольника лежат на окружности.

2) Если точка М равноудалена от вершин треугольника АВС, то она является центром вписанной окружности.

3) Окружность называется вписанной в треугольник, если все стороны треугольника касаются окружности.

Ответ: 3.

Решаем задачи.

113. а) В треугольнике АВС стороны АС=8, ВС=15, угол С равен 90°. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Ответ: 3

б) В треугольнике АВС стороны АС=10, ВС=24, угол С равен 90°. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Ответ: 4

в) В треугольнике АВС стороны АС=5, ВС=12, угол С равен 90°. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Ответ: 2

114. а) Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: 6.

б) Периметр треугольника равен 76, а радиус вписанной окружности равен 8. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: 304.

в) Периметр треугольника равен 88, а радиус вписанной окружности равен 10. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: 440.

115. а) Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр этого треугольника

Ответ: 24

б) Площадь треугольника равна 60, а радиус вписанной окружности равен 4. Найдите периметр этого треугольника

Ответ: 30

в) Площадь треугольника равна 102, а радиус вписанной окружности равен 6. Найдите периметр этого треугольника

Ответ: 34.

116. а) Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$ Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Ответ: 0,5

б) Сторона правильного треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Ответ: 3

в) Сторона правильного треугольника равна $8\sqrt{3}$ Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Ответ: 4.

117. а) Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, если высота треугольника равна 6.

Ответ: 2

б) Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, если высота треугольника равна 36.

Ответ: 12

в) Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, если высота треугольника равна 18.

Ответ: 6

118. а) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, Ки P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если AP=4 см, BM=6 см, CK=3 см.

Ответ: 26.

б) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, Ки P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если AM=5 см, BK=2 см, CP=4 см.

Ответ: 22

в) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, Ки P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если AM=4 см, BK=6 см, CP=4 см.

Ответ: 28.

119. а) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, если один из углов треугольника равен 90°, а расстояние от центра окружности до вершины этого угла равно $4\sqrt{2}$ см.

Ответ: 4.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, если один из углов треугольника равен 120°, а расстояние от центра окружности до вершины этого угла равно $18\sqrt{3}$ см

Ответ: 27.

в) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, если один из углов треугольника равен 90°, а расстояние от центра окружности до вершины этого угла равно $8\sqrt{2}$ см.

Ответ: 8.

Задачи с развернутым ответом.

1. Расстояние от точки пересечения биссектрис равнобедренного треугольника до его основания равно 3 см, а до вершины, противолежащей этому основанию, 5 см. Найдите основание треугольника.

Ответ: 12

2. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность. Она касается стороны BC в точке D. Найдите радиус этой окружности, если BD=2 и CD=3.

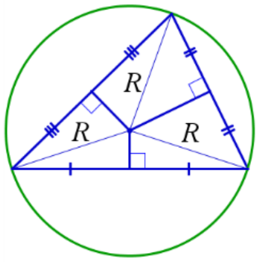
Ответ: 1,5

Занятие 18. Описанная около треугольника окружность.

<u>Повторяем теорию.</u>

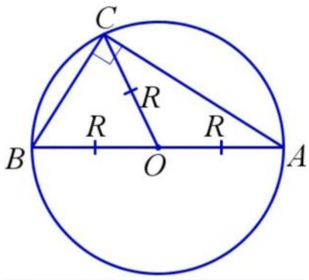
Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется *описанной около треугольник*, а треугольник называется *вписанным* в эту окружность.

Около любого треугольника можно описать окружность и только одну.



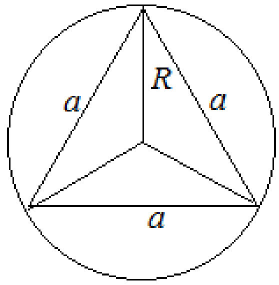
Центр описанной окружности в треугольник – это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Если треугольник прямоугольный, то центр описанной окружности – это *середина гипотенузы*.



Радиус описанной окружности равен половине гипотенузы или длине медианы, проведенной из вершины прямого угла к гипотенузе.

OB = OC = OA=$\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}$ AB .



Если треугольник равносторонний, то

$\boldsymbol{R} = \frac{2}{3}$h, где $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ или $\boldsymbol{R} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

R = 2r

Если треугольник произвольный, то $\boldsymbol{R} = \frac{abc}{4S}$ или $\boldsymbol{R} = \frac{a}{2\sin\alpha}$

Если треугольник тупоугольный, то центр описанной окружности находится вне треугольника.

С каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпедикуляров к сторонам и точка пересечения высот (или их продолжений). Эти четыре точки называют **замечательными точками треугольника**.

Проверяем себя.

Т52. Вставьте пропущенное слово:

а) Если серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются на стороне этого треугольника, то он является __________________.

б) Центр описанной около треугольника окружности – это точка пересечения _________ к сторонам треугольника.

в) Если треугольник прямоугольный, то центр описанной окружности – это ___________ гипотенузы.

г) Если треугольник тупоугольный, то центр описанной окружности находится ________ треугольника.

Ответ: а) прямоугольным; б) серединных перпендикуляров; в) середина; г) вне.

Т53. Выберите верное утверждение:

а) Центр описанной около треугольника окружности всегда лежит внутри этого треугольника

б) Если точка М равноудалена от вершин треугольника АВС, то она является центром описанной окружности.

в) Высоты треугольника совпадают с серединными перпендикулярами.

г) Точка пересечения средних линий треугольника является замечательной точкой треугольника.

Ответ: б).

Т54. Выберите верное утверждение:

1) Точка пересечения высот треугольника (или их продолжений) не относится к его замечательным точкам.

2) Окружность называется описанной около треугольника, когда окружность пересекает все стороны этого треугольника.

3) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

4) Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен гипотенузе этого треугольника.

Ответ: 3.

Решаем задачи.

120. а) В треугольнике АВС стороны АС=8, ВС=15, угол С равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

Ответ: 8,5

б) В треугольнике АВС стороны АС=10, ВС=24, угол С равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

Ответ: 13

в) В треугольнике АВС стороны АС=12, ВС=5, угол С равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

Ответ: 6,5.

121. а) Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника, если синус одного из углов треугольника равен $\frac{3}{7}$, а противолежащая этому углу сторона равна 15 см.

Ответ: 35

б) Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника, если синус одного из углов треугольника равен $\frac{4}{9}$, а противолежащая этому углу сторона равна 16 см.

Ответ: 36

в) Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника, если синус одного из углов треугольника равен $\frac{5}{6}$, а противолежащая этому углу сторона равна 20 см.

Ответ: 24.

122. а) Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если косинус одного из углов треугольника равен $\frac{3}{7}$, а прилежащий к этому углу катет равен 18 см.

Ответ: 42

б) Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если косинус одного из углов треугольника равен 0,25, а прилежащий к этому углу катет равен 1 см.

Ответ: 4

в) Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если косинус одного из углов треугольника равен $\frac{4}{9}$, а прилежащий к этому углу катет равен 12 см.

Ответ: 27.

123. а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 20 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 24 см.

Ответ: 26

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 24 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 5 см.

Ответ: 13

в) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 48 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 10 см.

Ответ: 26.

124. а) Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 42 см.

Ответ: 84

б) Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 21 см.

Ответ: 42

в) Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 26 см.

Ответ: 52.

125. а) Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 17 см. Найдите AC, если BC=16 см.

Ответ:30

б) Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 25 см. Найдите AC, если BC=48 см.

Ответ: 14

в) Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 12,5 см. Найдите AC, если BC=7 см.

Ответ: 24.

126. а) В равнобедренном треугольнике ABC $\angle A=30°$, $\angle C=30°$. Сторона AB равна 4 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: 4

б) В равнобедренном треугольнике ABC $\angle A=30°$, $\angle C=30°$. Сторона AB равна 14 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: 14

в) В равнобедренном треугольнике ABC $\angle A=30°$, $\angle C=30°$. Сторона AB равна 8 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: 8.

Задачи с развернутым ответом.

1. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см. а биссектриса, проведенная к основанию, - 8 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 6,25

2. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведенную из вершины B, в отношении 5:4, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=18.

Ответ: 15

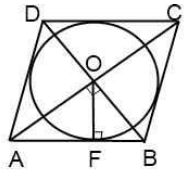
Занятие 19. Вписанная в четырехугольник, правильный многоугольник окружность.

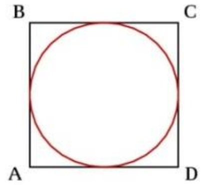
<u>Повторяем теорию.</u>

Окружность называется *вписанной* в четырехугольник, если она касается всех его сторон. Четырехугольник тогда называется *описанным.*

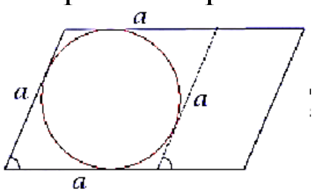
Не во всякий четырехугольник можно вписать окружность.

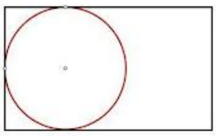
Окружность можно вписать в ромб, квадрат.





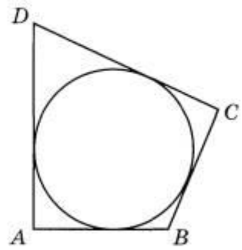
В параллелограмм и в прямоугольник окружность вписать нельзя.





В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

AB + DC = AD + BC

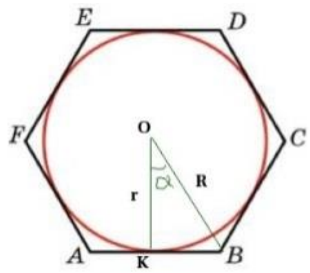


Обратное утверждение: Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность и притом только одну.

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

AK = KB



Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Эта точка называется *центром* правильного многоугольника.

$r = \frac{1}{2}a$ - радиус окружности, вписанной в квадрат со стороной *a*.

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ - радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной *a*.

Проверяем себя.

Т55. Вставьте пропущенное слово:

а) Сторона квадрата больше радиуса вписанной в него окружности в ______ раза.

б) В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон ____________.

в) Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их ______________.

г) В любой _____________ многоугольник можно вписать окружность и притом только одну.

Ответ: а) два; б) равны; в) серединах; г) правильный.

Т56. Выберите верное утверждение

а) Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, относится к его стороне как $\sqrt{3}$:2.

б) В любой прямоугольник можно вписать окружность.

в) В любую трапецию можно вписать окружность.

г) В любой многоугольник можно вписать окружность.

Ответ: а).

Т57. Выберите верное утверждение

а) Диаметр вписанной в квадрат окружности совпадает с диагональю квадрата.

б) Площадь четырехугольника равна произведению его периметра на радиус вписанной окружности.

в) Сторона квадрата равна удвоенному диаметру вписанной окружности.

г) В ромб можно вписать окружность.

Ответ: г)

Решаем задачи.

127. а) В квадрат вписана окружность. Найдите радиус окружности, если диагональ квадрата равна $12\sqrt{2}$.

Ответ: 6

б) В квадрат вписана окружность. Найдите радиус окружности, если диагональ квадрата равна $3\sqrt{2}$.

Ответ: 1,5

в) В квадрат вписана окружность. Найдите радиус окружности, если диагональ квадрата равна $8\sqrt{2}$.

Ответ: 4

128. а) Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 40.

Ответ: 6400.

б) Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 7.

Ответ: 196

в) Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 15.

Ответ: 900.

129. а) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$.

Ответ: 2

б) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $17\sqrt{3}$.

Ответ: 34

в) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $10\sqrt{3}$.

Ответ: 20

130. а) Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите её среднюю линию.

Ответ: 10

б) Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 60. Найдите её среднюю линию.

Ответ: 15

в) Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 30. Найдите её среднюю линию.

Ответ: 7,5.

131. а) Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ:4

б) Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 6 и 8. Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ: 7

в) Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 12 и 15. Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ: 13,5.

132. а) Найдите площадь прямоугольной трапеции, боковые стороны которой равны 12 см и 18 см, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность.

Ответ: 180

б) Найдите площадь прямоугольной трапеции, боковые стороны которой равны 10 см и 16 см, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность.

Ответ: 130

в) Найдите площадь прямоугольной трапеции, боковые стороны которой равны 14 см и 20 см, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность.

Ответ: 238.

133. а) В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 5.

Ответ: 20

б) В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 12.

Ответ: 48

в) В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 9.

Ответ: 36.

Задачи с развернутым ответом.

1.Во сколько раз нужно уменьшить сторону квадрата, площадь которого равна 54,08 дм^2, чтобы в него можно было вписать окружность радиусом

$2\sqrt{2}$ дм?

Ответ: в 1,3.

2. В ромб вписана окружность. Точка касания делит сторону ромба на отрезки, равные 9 см и 4 см. Найдите диаметр окружности.

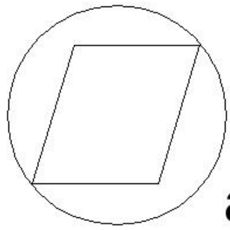
Ответ: 12.

Занятие 20. Описанная около четырехугольника, правильного многоугольника окружность.

<u>Повторяем теорию.</u>

Окружность называется *описанной* около четырехугольника, если все вершины четырехугольника лежат на окружности.

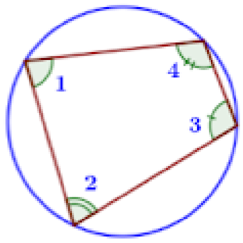
Около четырехугольника не всегда можно описать окружность. Например, нельзя описать окружность около ромба, не являющегося квадратом (<u>рис. а</u>).



а

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

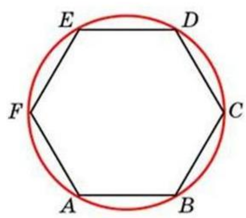
$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 180°$



Обратное утверждение: если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну

AB = BC = CD = DE =EF = FA



Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Эта точка называется *центром* правильного многоугольника.

Формулы радиусов описанной и вписанной окружностей для правильных n-угольников.

$$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}} \qquad r = \frac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$$

n	3	4	6
R	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Проверяем себя.

Т58. Вставьте пропущенное слово:

а) Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется ___________ около многоугольника.

б) Около четырехугольника __________ можно описать окружность.

в) В любом вписанном четырехугольнике сумма ____________ углов равна 180°.

г) Окружность можно описать около ___________ трапеции.

Ответ: а) описанной; б) не всегда; в) противоположных; г) равнобедренной.

Т59.Выберите верное утверждение

а) Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен половине его стороны.

б) В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

в) Окружность называется описанной около многоугольника, когда окружность пересекает все стороны этого многоугольника.

г) Окружность называется описанной около многоугольника, когда центры многоугольника и окружности совпадают.

Ответ: б).

Т60.Выберите верное утверждение

а) Около ромба можно описать окружность.

б) Сторона правильного четырехугольника равна радиусу описанной около него окружности.

в) Любой прямоугольник можно вписать в окружность.

г) Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен половине его стороны.

Ответ: в).

Решаем задачи.

134. а) Около квадрата описана окружность. Найдите радиус окружности, если сторона квадрата равна $12\sqrt{2}$.

Ответ: 12

б) Около квадрата описана окружность. Найдите радиус окружности, если сторона квадрата равна $8\sqrt{2}$.

Ответ: 8

в) Около квадрата описана окружность. Найдите радиус окружности, если сторона квадрата равна $3\sqrt{2}$.

Ответ: 3

135. а) Найдите радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, если радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник равен $3{,}5\sqrt{3}$.

Ответ: 7

б) Найдите радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, если радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник равен $6\sqrt{3}$.

Ответ: 12

в) Найдите радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, если радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник равен $8\sqrt{3}$.

Ответ: 16.

136. а) Большая диагональ правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 6. Найдите радиус этой окружности.

Ответ: 3

б) Большая диагональ правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 5. Найдите радиус этой окружности.

Ответ: 2.5

в) Большая диагональ правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 12. Найдите радиус этой окружности.

Ответ: 6.

137. а) Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 5.

Ответ: 10

б) Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 7.

Ответ: 14

в) Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 15.

Ответ: 30.

138. а) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна её меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.

Ответ: 6

б) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна её меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 18. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.

Ответ: 9

в) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна её меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 22. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.

Ответ: 11.

139. а) Около параллелограмма, одна из диагоналей которого равна 7 см, описана окружность. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

Ответ: 7

б) Около параллелограмма, одна из диагоналей которого равна 9 см, описана окружность. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

Ответ: 9

в) Около параллелограмма, одна из диагоналей которого равна 17 см, описана окружность. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

Ответ: 17

140. а) Найдите сторону прямоугольника, вписанного в окружность радиуса 10, если она стягивает дугу 60°.

Ответ: 10

б) Найдите сторону прямоугольника, вписанного в окружность радиуса 14, если она стягивает дугу 60°.

Ответ: 14

в) Найдите сторону прямоугольника, вписанного в окружность радиуса 23, если она стягивает дугу 60°.

Ответ: 23

Задачи с развернутым ответом.

1. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 60, средняя линия равна 25. Найдите длину боковой стороны трапеции.

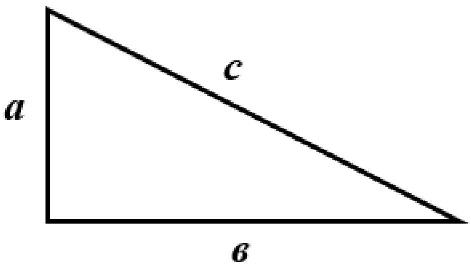
Ответ:5

2. Периметр правильного шестиугольника равен 108. Найдите диаметр описанной окружности.

Ответ: 36

Занятие 21. Теорема Пифагора.

<u>Повторяем теорию.</u>



Теорема Пифагора.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Следствие из теоремы Пифагора. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.

Теорема, обратная теореме Пифагора. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Числа, удовлетворяющие равен $c^2 = a^2 + b^2$, называют *пифагоровыми тройками.*

Пифагоровых троек очень много, вот некоторые:

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(8, 15, 17)	(7, 24, 25)
(20, 21, 29)	(12, 35, 37)	(9, 40, 41)	(28, 45, 53)
(11, 60, 61)	(16, 63, 65)	(33, 56, 65)	(48, 55, 73)
(13, 84, 85)	(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(65, 72, 97)

Из каждой тройки можно получить новую. Например, тройка (6, 8, 10) получается умножением на два тройки (3, 4, 5).

Прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются целыми числами, называются *пифагоровыми треугольниками*. Треугольник со сторонами 3,4,5 часто называют *египетским треугольником*.

<u>Проверяем себя.</u>

Т61. Вставьте пропущенное слово:

а) В прямоугольном треугольнике ____равен сумме квадратов катетов.

б) В прямоугольном треугольнике квадрат катета равен _____________ квадрата гипотенузы и квадрата другого катета.

в) Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник _______________.

г) Самая большая сторона прямоугольного треугольника называется___________.

Ответ: а) квадрат гипотенузы; б) разности; в) прямоугольный; г) гипотенуза.

Т62. Выберите верное утверждение.

а) В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна сумме катетов.

б) Сумма углов прямоугольного треугольника равна 90 градусам.

в) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов.

Ответ: в).

Т63. Выберите неверное утверждение.

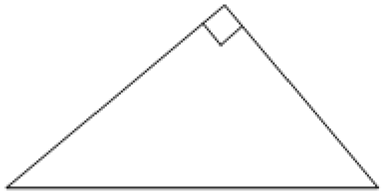
1) Треугольник со сторонами 3, 4, 5 прямоугольный.

2) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен разности квадратов катетов.

3) Если расстояние от точки до прямой больше 3, то и длина любой наклонной, проведённой из данной точки к прямой, больше 3.

Ответ: 2.

<u>Решаем задачи.</u>



141. а) Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 21. Найдите гипотенузу этого треугольника.

Ответ: 29.

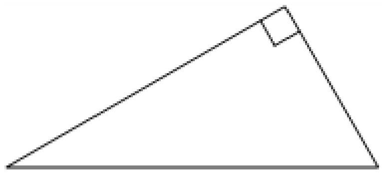
б) Катеты прямоугольного треугольника равны 10 и 24. Найдите гипотенузу этого треугольника.

Ответ: 26.

в) Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 15. Найдите гипотенузу

этого треугольника.

Ответ: 25.



142. а) В прямоугольном треугольнике катет и гипотенуза равны 8 и 17 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.

*Ответ:*15.

б) В прямоугольном треугольнике катет и гипотенуза равны 16 и 20 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.

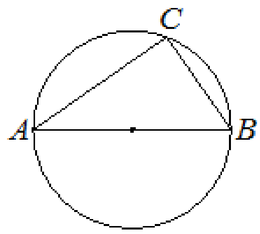
Ответ: 12.

в) В прямоугольном треугольнике катет и гипотенуза равны 5 и 13 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.

Ответ: 12.

143. а) Центр окружности, описанной около треугольника АВС, лежит на стороне АВ. Радиус окружности равен 20. Найдите ВС, если АС=32.

Ответ: 24.



б) Центр окружности, описанной около треугольника АВС, лежит на стороне АВ. Радиус окружности равен 13. Найдите ВС, если АС= 24.

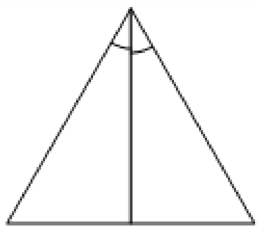
*Ответ:*10.

в) Центр окружности, описанной около треугольника АВС, лежит на стороне АВ. Радиус окружности равен 17. Найдите ВС, если АС=30.

*Ответ:*16.

144. а) Биссектриса равностороннего треугольника равна $9\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

Ответ: 18.



б) Медиана равностороннего треугольника равна $11\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

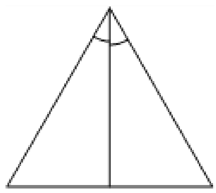
Ответ: 22.

в) Высота равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

Ответ: 24.

145. а) Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите медиану этого треугольника.

Ответ: 21.



б) Сторона равностороннего треугольника равна $16\sqrt{3}$. Найдите высоту этого треугольника.

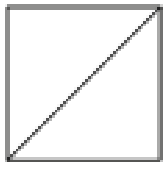
Ответ: 24.

в) Сторона равностороннего треугольника равна $10\sqrt{3}$. Найдите биссектрису этого треугольника.

*Ответ:*15.

146. а) Сторона квадрата равна $2\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.

Ответ: 4.



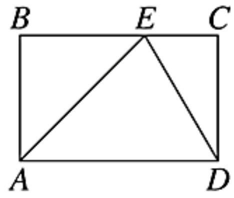
б) Сторона квадрата равна $10\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.

Ответ: 20.

в) Сторона квадрата равна $11\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.

Ответ: 22.

147. а) На стороне BC прямоугольника ABCD, у которого
AB = 12 и AD = 17, отмечена точка E так, что треугольник ABE равнобедренный. Найдите ED.



Ответ: 13.

б) На стороне BC прямоугольника ABCD, у которого AB = 15 и AD = 23, отмечена точка E так, что треугольник ABE равнобедренный. Найдите ED.

*Ответ:*17.

в) На стороне BC прямоугольника ABCD, у которого AB = 24 и AD = 31, отмечена точка E так, что треугольник ABE равнобедренный. Найдите ED.

Ответ: 25.

Задачи с развернутым ответом.

1. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF = 24, BF = 10.

Ответ: 26.

2. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 16, а AB=15.

Ответ: 25.

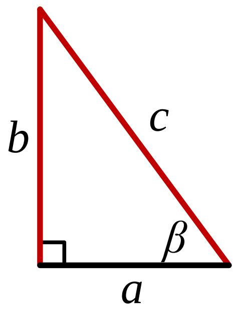
Занятие 22. Тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике.

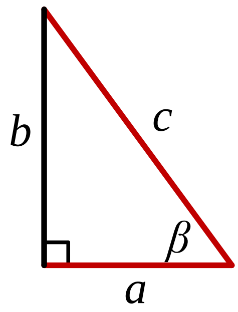
<u>Повторяем теорию.</u>

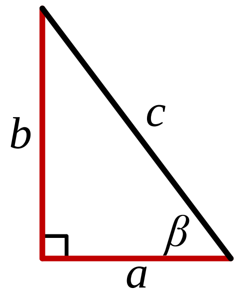
Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.







$\sin\beta = \dfrac{b}{c}$ $\quad$ $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$ $\quad$ $tg\beta = \dfrac{b}{a}$

Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны, тангенсы этих углов равны.

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$,

$$tg\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}.$$

<u>Проверяем себя.</u>

Т64. Вставьте пропущенное слово:

а) Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение ____________________ катета к гипотенузе.

б) __________________острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

в) Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение ____________________к прилежащему катету.

г) Катет в прямоугольном треугольнике равен __________________ гипотенузы на синус противолежащего угла.

Ответ: а) противолежащего; б) косинусом; в) противолежащего катета; г) произведению.

Т65. Выберите верное утверждение.

а) Синус острого угла прямоугольного треугольника всегда меньше 1.

б) Косинус угла зависит не только от градусной меры угла, но и от размеров треугольника.

в) Тангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему.

Ответ: а).

Т66. Выберите неверное утверждение.

а) Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус прилежащего угла.

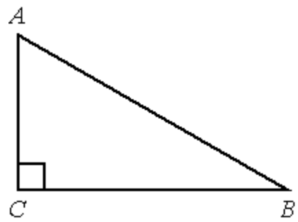
б) Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен произведению противолежащего катета на прилежащий катет.

в) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна отношению катета к синусу противолежащего угла.

Ответ: б).

<u>Решаем задачи.</u>

148. а) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AC=7, AB=25. Найдите sin B.



Ответ: 0,28

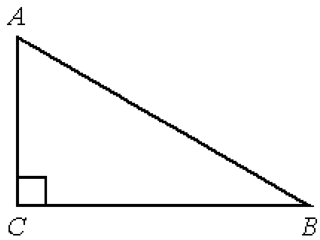
б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AC=6, AB=10. Найдите sin B.

Ответ: 0,6

в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AC=11, AB=25. Найдите sin B.

Ответ: 0,44

149. а) В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos B = \frac{4}{7}$,



AB = 21. Найдите BC.

Ответ: 12.

б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos B = \frac{8}{17}$,

AB = 34. Найдите BC.

Ответ: 16.

в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos B = \frac{5}{12}$, AB = 60. Найдите BC.

*Ответ:*25.

150. а) В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $tgB = \frac{9}{7}$, BC = 42. Найдите AC.

Ответ: 54.

б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, $tgB = \frac{4}{11}$, BC = 22. Найдите AC.

Ответ: 8.

в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, $tgB = \frac{11}{8}$, BC = 24. Найдите AC.

*Ответ:*33.

151. а) Катеты прямоугольного треугольника равны $5\sqrt{15}$ и 5. Найдите синус наименьшего угла этого треугольника.

Ответ: 0,25.

б) Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 6. Найдите синус наименьшего угла этого треугольника.

Ответ: 0,6.

в) Катеты прямоугольного треугольника равны $6\sqrt{6}$ и 3. Найдите синус наименьшего угла этого треугольника.

Ответ: 0,2.

152. а) Синус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Найдите cos A.

Ответ: 0,2.

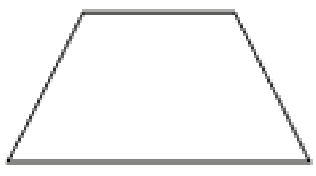
б) Синус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{3\sqrt{11}}{10}$. Найдите cos A.

Ответ: 0,1.

в) Синус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{3\sqrt{7}}{8}$. Найдите cos A.

Ответ: 0,125

153. а) Основания равнобедренной трапеции равны 51 и 65. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.



Ответ: 0,96.

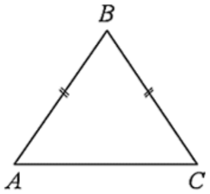
б) Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12. Боковые стороны равны 5. Найдите синус острого угла трапеции.

Ответ: 0,8.

в) Основания равнобедренной трапеции равны 11 и 41. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.

Ответ: 0,8.

154. а) В треугольнике ABC известно, что AB = BC = 20, AC = 24. Найдите синус угла BAC.



Ответ: 0,8.

б) В треугольнике ABC известно, что AB = BC = 50, AC = 28. Найдите синус угла BAC.

Ответ: 0,96.

в) В треугольнике ABC известно, что AB = BC = 12, AC = $12\sqrt{3}$. Найдите синус угла BAC.

Ответ: 0,5.

<u>Задачи с развернутым ответом.</u>

<u>1.</u> В треугольнике ABC угол C равен 90°, AC = 4,8, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AB.

Ответ: 5.

<u>2.</u> В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, BH = 12, $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите AB.

Ответ: 27.

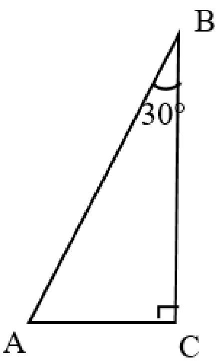
Занятие 23. Значения синуса, косинуса, тангенса для углов 30°, 45°, 60°.

Повторяем теорию

Таблица значений sinα, cosα, tgα для углов α, равных 30°, 45°, 60°.

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.



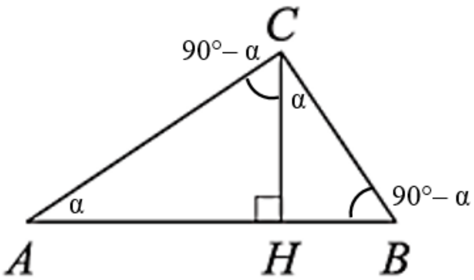
Если ∠ B = 30°, то AC = $\frac{1}{2}$ AB.

Верно и обратное. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Полезные факты.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°: ∠A+∠B=90°.

Следовательно, если в прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 45°, то такой треугольник является равнобедренным.



Если в прямоугольном треугольнике ABC провести высоту CH из прямого угла, то ∠BAC=∠BCH и ∠ABC=∠ACH.

Проверяем себя.

Т67. Вставьте пропущенное слово:

а) Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение ____________________ катета к гипотенузе.

б) Гипотенуза в ________________больше катета, лежащего против угла 30°.

в) Значения синуса и косинуса угла в ______________равны.

г) Если один из острых углов прямоугольного треугольника равен 45°, то треугольник______________________

Ответ: а) прилежащего; б) два раза; в) 45°; г) равнобедренный.

Т68. Выберите верное утверждение.

а) Тангенс острого угла прямоугольного треугольника всегда меньше 1.

б) sin 45° = 1.

в) sin 60°= cos 30°.

Ответ: в).

Т69. Выберите неверное утверждение.

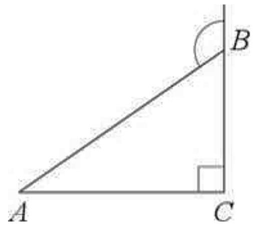
а) Если два угла треугольника равны, то равны и значения тангенсов этих углов.

б) Если треугольник прямоугольный, то каждый его острый угол равен 45°.

в) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Ответ: б).

Решаем задачи.



155. а) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AB = 12. Внешний угол при вершине B равен 120°. Найдите BC.

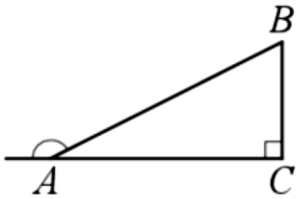
Ответ: 6.

б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AB = 34. Внешний угол при вершине B равен 120°. Найдите BC.

Ответ: 17.

в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, AB = 40. Внешний угол при вершине B равен 120°. Найдите BC.

Ответ: 20.



156. а) В прямоугольном треугольнике ABC внешний угол при вершине A равен 150°. Катет BC =19. Найдите гипотенузу AB.

Ответ: 38.

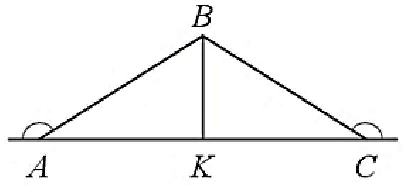
б) В прямоугольном треугольнике ABC внешний угол при вершине A равен 150°. Катет BC = 41. Найдите гипотенузу AB.

Ответ: 82.

в) В прямоугольном треугольнике ABC внешний угол при вершине A равен 150°. Катет BC = 23. Найдите гипотенузу AB.

Ответ: 46.

157. а) В ΔABC внешние углы при вершинах A и C равны 150°, AB = 54. Найдите биссектрису BK.



Ответ: 27.

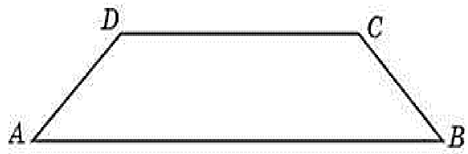
б) В ΔABC внешние углы при вершинах A и C равны 150°, AB = 48. Найдите биссектрису BK.

Ответ: 24.

в) В ΔABC внешние углы при вершинах A и C равны 150°, AB = 44. Найдите биссектрису BK.

Ответ: 22.

158. а) Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 9, один из углов равен 45°. Найдите высоту трапеции.



Ответ: 3.

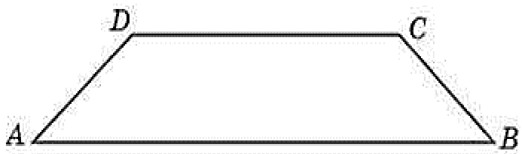
б) Основания равнобедренной трапеции равны 51 и 23, один из углов равен 45°. Найдите высоту трапеции.

Ответ: 14.

в) Основания равнобедренной трапеции равны 45 и 27, один из углов равен 45°. Найдите высоту трапеции.

Ответ: *9.*

159. а) В равнобедренной трапеции основания равны 12 и 27, острый угол равен 60°. Найдите ее периметр.



Ответ: 69.

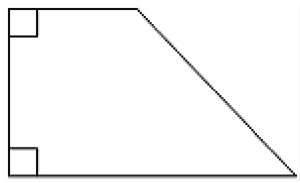
б) В равнобедренной трапеции основания равны 29 и 50, острый угол равен 60°. Найдите ее периметр.

Ответ: *121.*

в) В равнобедренной трапеции основания равны 45 и 74, острый угол равен 60°. Найдите ее периметр.

Ответ: *177.*

160. а) В прямоугольной трапеции основания равны 3 и 5, а один из углов равен 135°. Найдите меньшую боковую сторону.



Ответ:2.

б) В прямоугольной трапеции основания равны 12 и 19, а один из углов равен 135°. Найдите меньшую боковую сторону.

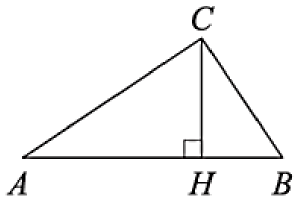
Ответ: *7.*

в) В прямоугольной трапеции основания равны 21 и 30, а один из углов равен 135°. Найдите меньшую боковую сторону.

Ответ: *9*.

161. а) В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, угол A равен 30°. Найдите AH, если AB =2.

Ответ:1,5.



б) В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, угол A равен 30°. Найдите BH, если AB =4.

Ответ: *1*.

в) В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, угол A равен 30°. Найдите BH, если AB =16.

Ответ: *4*.

<u>Задачи с развернутым ответом.</u>

1. Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 60°и 135°, а CD=36.

Ответ: $12\sqrt{6}$.

2. Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 135°, а CD=29.

Ответ: $29\sqrt{2}$.

3. Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 150°, а CD=33.

Ответ: $11\sqrt{3}$.

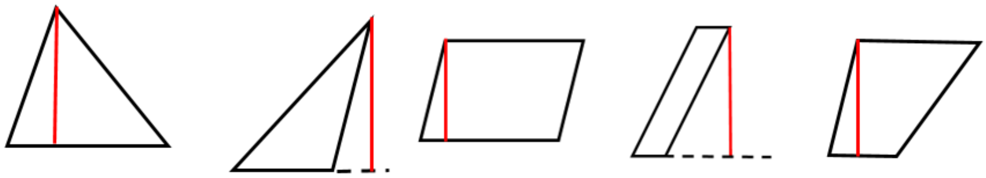
Занятие 24. Треугольники и четырехугольники на клетчатой бумаге.

<u>Повторяем теорию</u>

Высота треугольника – это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

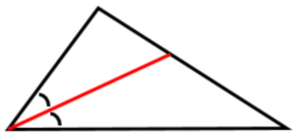
Высота параллелограмма — это перпендикуляр, опущенный из любой точки одной стороны параллелограмма на прямую, содержащую противоположную сторону.

Высота трапеции – это перпендикуляр, опущенный из любой точки одного основания к другому основанию

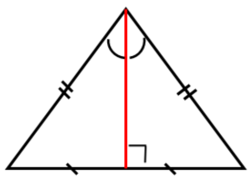


Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны

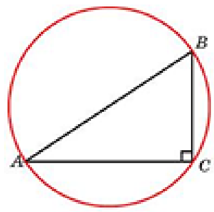


В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, одновременно является биссектрисой и высотой.



Свойства прямоугольного треугольника.

1) *Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника*, равен половине гипотенузы: $R=\frac{1}{2}AB$

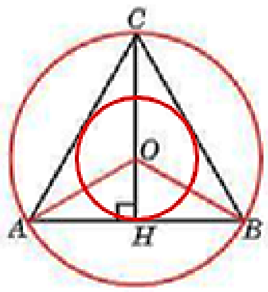


(*Центр окружности*, описанной около прямоугольного треугольника — середина гипотенузы).

2) В прямоугольном треугольнике *медиана, проведённая к гипотенузе*, равна половине гипотенузы.

3) В равнобедренном прямоугольном треугольнике *биссектриса, высота, медиана, проведённая к гипотенузе,* равна половине гипотенузы.

В равностороннем треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

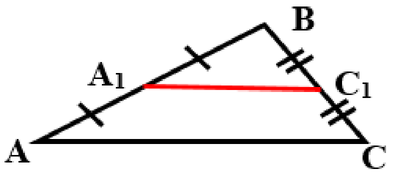


Центр равностороннего треугольника – точка пересечения медиан, биссектрис и высот, делит эти отрезки в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Радиус вписанной окружности r= OH=$\frac{1}{3}$CH,

радиус описанной окружности R= OC = $\frac{2}{3}$ CH.

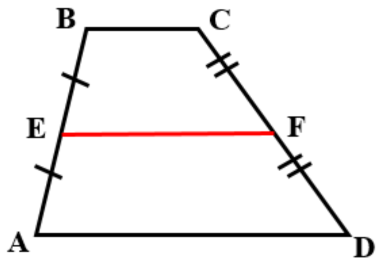
Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.



Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

$A_1C_1 \parallel AC$, $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$.

Средняя линия трапеции – отрезок, соединяющий середины боковых сторон этой трапеции.



Средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме.

$EF \parallel AD \parallel BC$, $EF = \dfrac{BC+AD}{2}$.

Проверяем себя.

Т70. Вставьте пропущенное слово:

а) *Высота* треугольника – это________________, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

б) _______________ треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

в) *Биссектриса* треугольника – _____________ треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

г) __________ – точка пересечения медиан, биссектрис и высот равностороннего треугольника.

Ответ: а) перпендикуляр; б) медиана; в) отрезок биссектрисы угла; г) центр равностороннего треугольника.

Т71. Выберите верное утверждение.

а) Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины, противолежащей основанию, делит основание на две равные части.

б) Любая медиана равнобедренного треугольника является его биссектрисой.

в) У равнобедренного треугольника есть центр симметрии.

Ответ: а).

Т72. Выберите верное утверждение

1) Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий боковые стороны.

2) Средняя линия трапеции равна половине её основания.

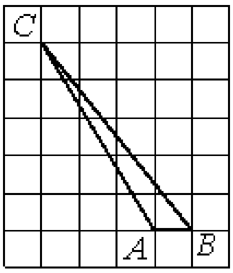
3) Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне.

Ответ: 3.

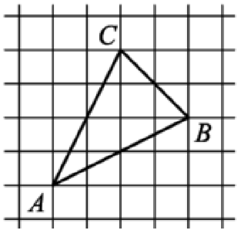
Решаем задачи.

162. а) Фигуры изображены на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.

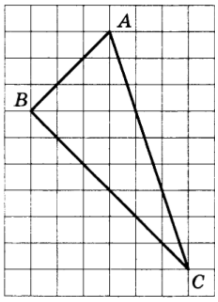
1) Найдите длину высоты, опущенной на сторону AB.



2) Найдите длину медианы, проведённой из вершины *C*.



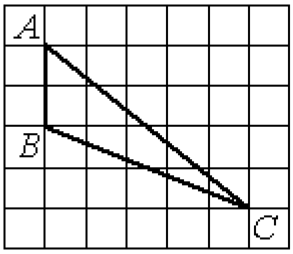
3) Найдите длину биссектрисы, проведённой из вершины *B*.



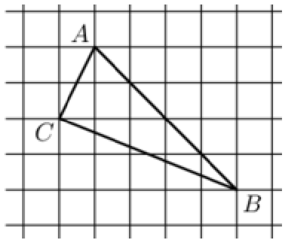
Ответ: 1) 5; 2) 3; 3) 4.

б) Фигуры изображены на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.

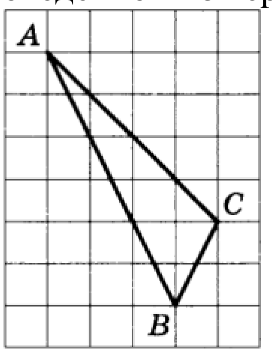
1) Найдите длину высоты, опущенной на сторону AB.



2) Найдите длину медианы, проведённой из вершины *C*.



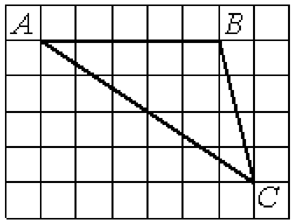
3) Найдите длину биссектрисы, проведённой из вершины *B*.



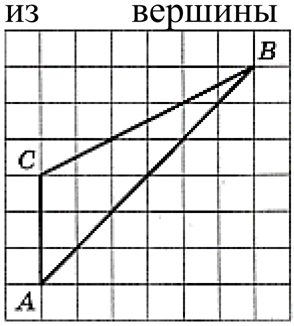
Ответ: 1) 5; 2) 3; 3) 3.

в) Фигуры изображены на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.

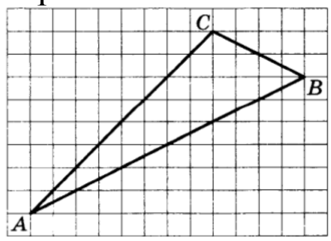
1) Найдите длину высоты, опущенной на сторону АВ.



2) Найдите длину медианы, проведённой из вершины *C*.



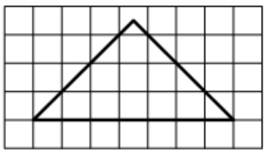
3) Найдите длину биссектрисы, проведённой из вершины *B*.



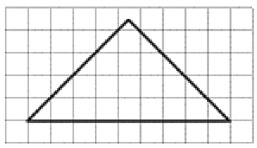
Ответ: 1) 4; 2) 3; 3) 6.

163. а) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник.

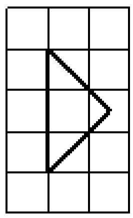
1) Найдите длину биссектрисы, выходящей из вершины прямого угла.



2) Найдите длину медианы, проведённой к гипотенузе.



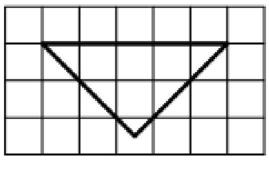
3) Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе.



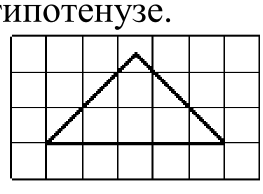
Ответ: 1) 3,5; 2) 4,5; 3) 1,5.

б) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник.

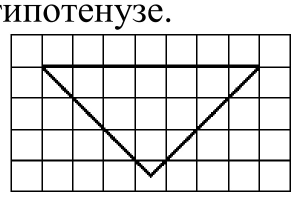
1) Найдите длину биссектрисы, выходящей из вершины прямого угла.



2) Найдите длину медианы, проведённой к гипотенузе.



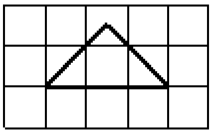
3) Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе.



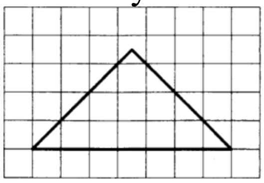
Ответ: 1) 2,5; 2) 2,5; 3) 3,5.

в) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник.

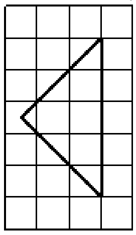
1) Найдите длину биссектрисы, выходящей из вершины прямого угла.



2) Найдите длину медианы, проведённой к гипотенузе.



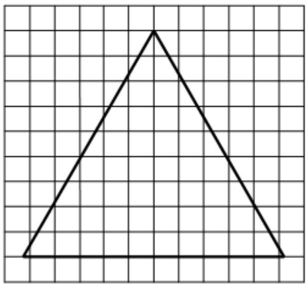
3) Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе.



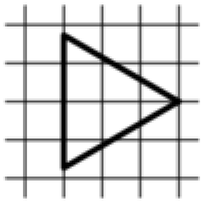
Ответ: 1) 1,5; 2) 3,5; 3) 2,5.

164. а) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник.

1) Найдите радиус описанной около него окружности.



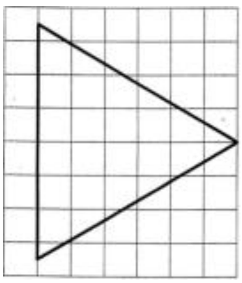
2) Найдите радиус вписанной в него окружности.



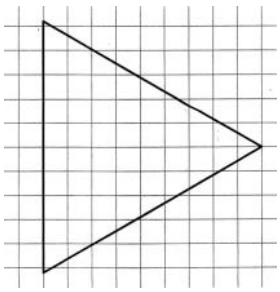
Ответ: 1) 6; 2) 1.

б) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник.

1) Найдите радиус описанной около него окружности.



2) Найдите радиус вписанной в него окружности.

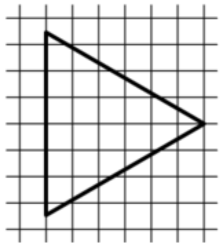


Ответ: 1) 4; 2) 3.

в) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник.

1) Найдите радиус описанной около него окружности.

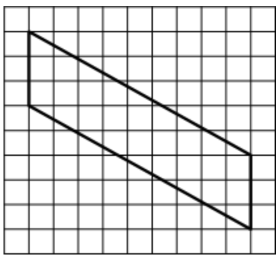
2) Найдите радиус вписанной в него окружности.



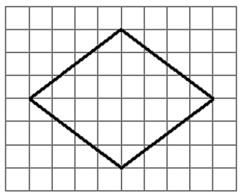
Ответ: 1) 10; 2) 2.

165. а) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм.

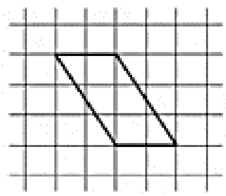
1) Найдите длину большей высоты.



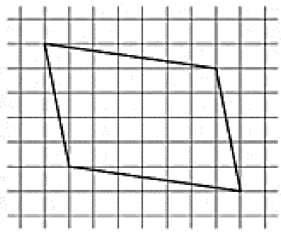
2) Найдите длину большей диагонали



3) Найдите длину меньшей диагонали.



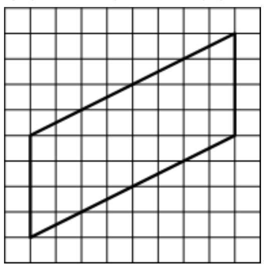
4) Найдите длину его большей диагонали.



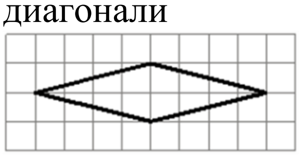
Ответ: 1) 9; 2) 8; 3) 3; 4) 10.

б) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм.

1)Найдите длину большей высоты.

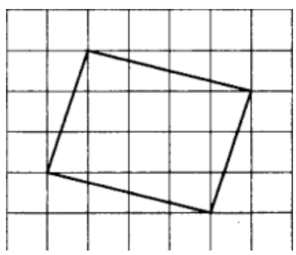


2) Найдите длину большей диагонали



3) Найдите длину меньшей диагонали.

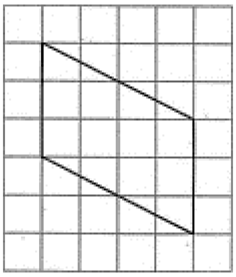
4) Найдите длину его меньшей диагонали.



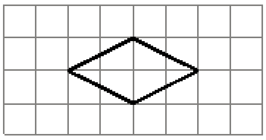
Ответ: 1) 8; 2) 8; 3) 5; 4) 5.

в) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм.

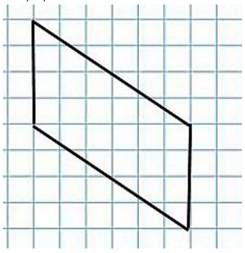
1) Найдите длину большей высоты.



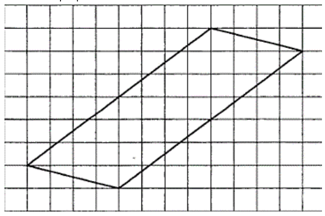
2) Найдите длину большей диагонали



3) Найдите длину меньшей диагонали.



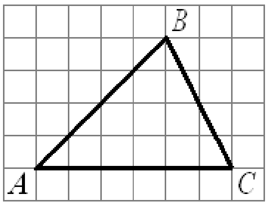
4) Найдите длину его большей диагонали.



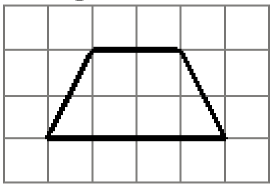
Ответ: 1) 4; 2) 4; 3) 6; 4) 13.

166. а) Фигуры изображены на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.

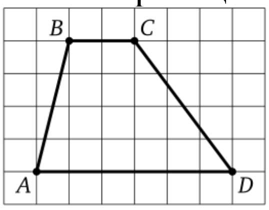
1) Найдите длину средней линии треугольника, параллельной стороне AC.



2) Найдите длину средней линии трапеции.



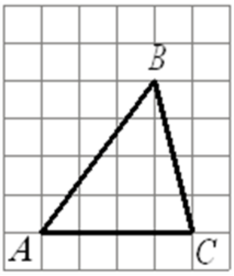
3) Найдите длину высоты трапеции.



Ответ: 1) 3; 2) 3; 3) 4.

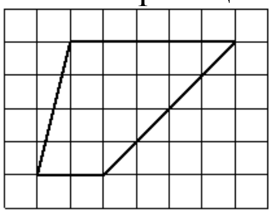
б) Фигуры изображены на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.

1) Найдите длину средней линии треугольника, параллельной стороне AC.



2) Найдите длину средней линии трапеции.

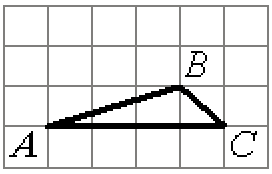
3) Найдите длину высоты трапеции.



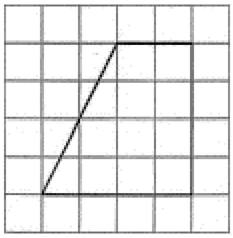
Ответ: 1) 2; 2) 7; 3) 4.

в) Фигуры изображены на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.

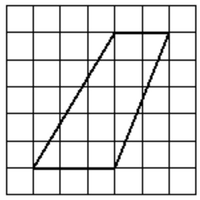
1) Найдите длину средней линии треугольника, параллельной стороне AC.



2) Найдите длину средней линии трапеции.



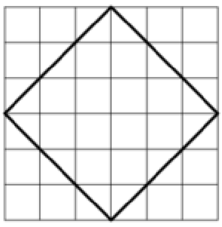
3) Найдите длину высоты трапеции.



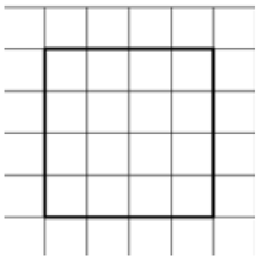
Ответ: 1) 2; 2) 3; 3) 5.

167. а) Фигуры изображены на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.

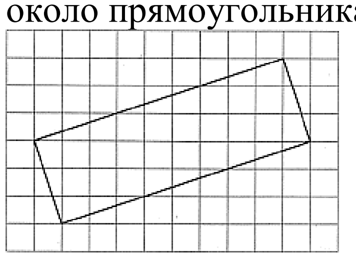
1) Найдите радиус описанной около квадрата окружности.



2) Найдите радиус вписанной в квадрат окружности.



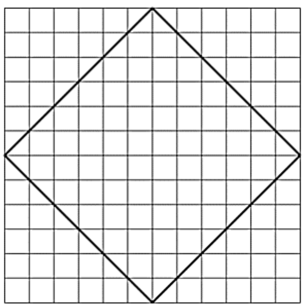
3) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.



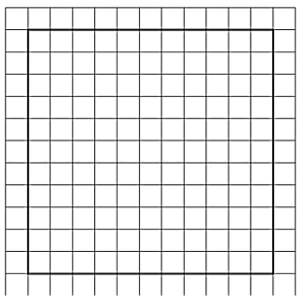
Ответ: 1) 3; 2) 2; 3) 5.

б) Фигуры изображены на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.

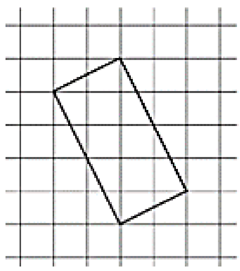
1) Найдите радиус описанной около квадрата окружности.



2) Найдите радиус вписанной в квадрат окружности.



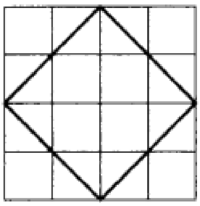
3) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.



Ответ: 1) 6, 2) 5,5; 3) 2,5.

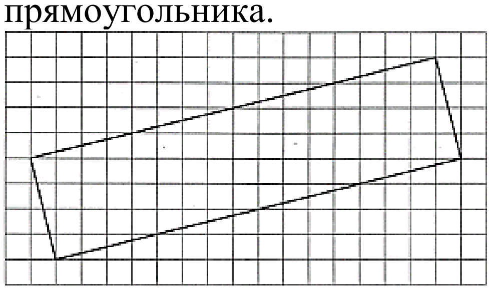
в) Фигуры изображены на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.

1) Найдите радиус описанной около квадрата окружности.



2) Найдите радиус вписанной в квадрат окружности.

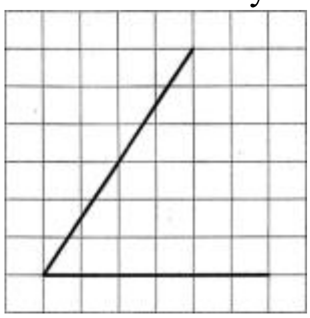
3) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.



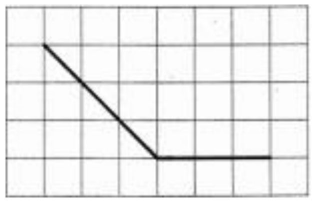
Ответ: 1) 2; 2) 3; 3) 8,5.

168. а) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображены углы. Найдите тангенсы этих углов.

1)

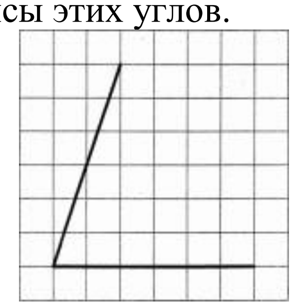


2)



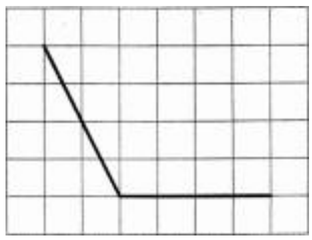
Ответ: 1) 1,5; 2) –1.

б) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображены углы. Найдите тангенсы этих углов.



1)

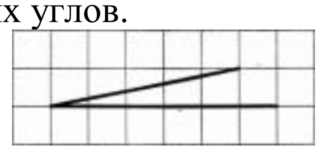
2)



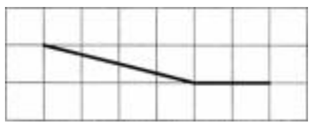
Ответ: 1) 3; 2) –2.

в) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображены углы. Найдите тангенсы этих углов.

1)



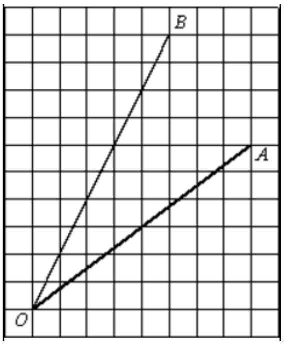
2)



Ответ: 1) 0,2; 2) –0,25.

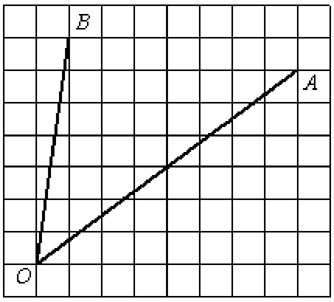
<u>Дополнительные задачи.</u>

1. Найти тангенс угла AOB



Ответ: 0,5.

2. Найти тангенс угла AOB:



Ответ: 1.

Раздел 3. Площади.

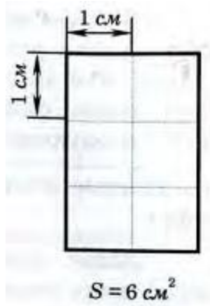
Занятие 25. Площадь плоской фигуры. Площадь параллелограмма.

<u>Повторяем теорию.</u>

1. Понятие площади известно каждому из жизненного опыта.

В геометрии площадь плоской фигуры - это числовая характеристика, показывающая размер этой фигуры.

Площадь многоугольника - величина занимаемой им части плоскости.



Обычно площадь оценивают квадратами со стороной в 1единичный отрезок, накладывая сетку из таких квадратов на фигуру. Поэтому исторически площадь называли *квадратурой*.

2. Единицы измерения площади:

1 квадратный метр (м^2) = 100 дм^2 (10дм ·10дм) = 10000 см^2 (100см·100см) = 1000000 мм^2(1000мм·1000мм).

1 квадратный километр (км^2) = 1000000 (м^2).

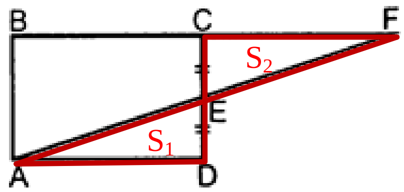
1 ар (сотка) = 100(м^2).

1 гектар (га) = 10000(м^2) = 100(ар) = 0,01(км^2).

3.Свойства площадей плоских фигур:

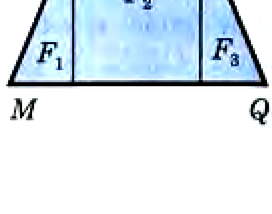
Равные многоугольники имеют равные площади.

$S_1 = S_2$



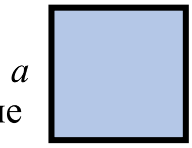
Многоугольники, имеющие равные площади, называют **равновеликими**. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

$S_{MNPQ} = S_{F1} + S_{F2} + S_{F3}$



Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

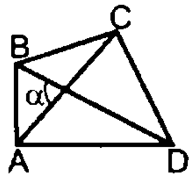
$S = a{\cdot}a = a^2$



Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус острого угла между ними.

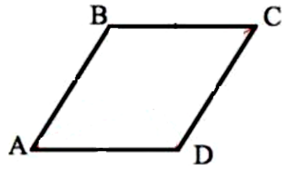
$$S = \frac{1}{2}AC\ BD\ \sin\alpha$$

AC и BD – диагонали

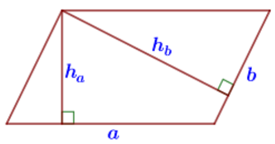
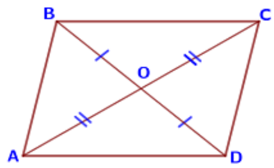
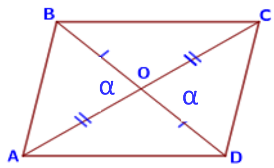


Параллелограмм – это четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

$AB \parallel CD,\ BC \parallel AD$



Площадь параллелограмма.

Рисунок	Определение	Формула
	Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, проведенной к этой стороне.	$S = a\,h_a = b\,h_b$
	Площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними	$S = AB{\cdot}AD\cdot\sin\angle A = =BA\cdot BC\cdot\sin\angle B$
	Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними	$S = \frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$

Проверяем себя.

Т73. Какие из следующих утверждений верны?

а) Площадь выпуклого четырехугольника равна произведению его диагоналей на синус острого угла между ними.

б) Площадь любого параллелограмма равна произведению длин его сторон.

в) Площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними.

г) Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Ответ в), г).

Т74. Выберите верные утверждения.

1) Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

2) Площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали.

3) Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

4) Все равносторонние треугольники имеют равные площади.

Ответ 123.

Т75. Какие из следующих утверждений верны?

1) Любой параллелограмм с прямыми углами является прямоугольником.

2) Площадь квадрата равна сумме двух его смежных сторон.

3) Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними**.**

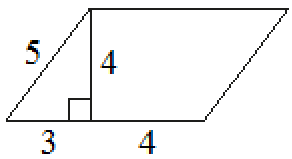
4) Равные треугольники имеют равные площади.

Ответ 134.

Решаем задачи.

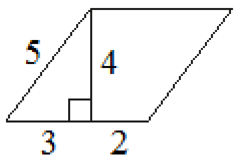
169. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.

а)



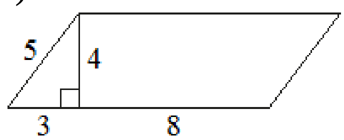
Ответ 28

б)



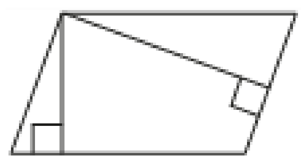
Ответ 20

в)



Ответ 44

170. а) Площадь параллелограмма равна 40, а две его стороны равны 5 и 10. Найдите его высоты. В ответе укажите большую высоту.



Ответ 8.

б) Площадь параллелограмма равна 36, а две его стороны равны 6 и 12. Найдите его высоты. В ответе укажите большую высоту.

Ответ 6.

в) Площадь параллелограмма равна 60, а две его стороны равны 4 и 20. Найдите его высоты. В ответе укажите большую высоту.

Ответ 15.

171. а) Стороны параллелограмма равны 3 и 13, а синус одного из углов параллелограмма равен 2/3. Найдите площадь параллелограмма.

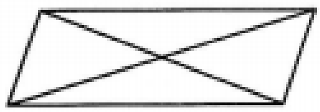
Ответ 26.

б) Стороны параллелограмма равны 8 и 10, а синус одного из углов параллелограмма равен 0,05. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ 4.

в) Стороны параллелограмма равны 12 и 5, а синус одного из углов параллелограмма равен 1/3. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ 20.



172. а) Диагонали параллелограмма равны 7 и 24, а угол между ними равен 30^0. Найдите площадь параллелограмма.

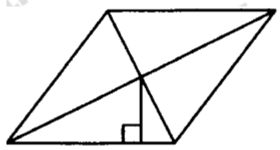
Ответ 42.

б) Диагонали параллелограмма равны 10 и 26, а угол между ними равен 30^0. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ 65.

2) Диагонали параллелограмма равны 12 и 17, а угол между ними равен 30^0. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ 51.



173. а) Сторона параллелограмма равна 7, а расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до нее равно 3. Найдите площадь параллелограмма.

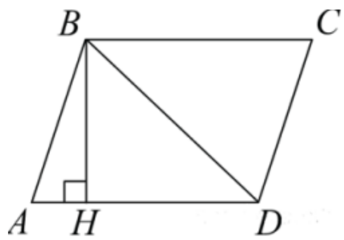
Ответ 42.

б) Сторона параллелограмма равна 11, а расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до нее равно 4. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ 88.

в) Сторона параллелограмма равна 8, а расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до нее равно 3,5. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ 56.



174. а) Высота BH параллелограмма ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 2 и HD = 6. Диагональ параллелограмма BD равна 10. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ 64.

б) Высота BH параллелограмма ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 2 и HD = 5. Диагональ параллелограмма BD равна 13. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ 84.

в) Высота BH параллелограмма ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 7 и HD = 15. Диагональ параллелограмма BD равна 25. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ 440.

175. а) Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а один из углов равен 60°. Найдите площадь параллелограмма, деленную на $\sqrt{3}$.

Ответ 30.

б) Одна из сторон параллелограмма равна 13, другая равна 24, а один из углов равен 45^0. Найдите площадь параллелограмма, деленную на $\sqrt{2}$.

Ответ 156.

в) Одна из сторон параллелограмма равна 30, другая равна 9, а один из углов равен 45^0. Найдите площадь параллелограмма, деленную на $\sqrt{2}$.

Ответ 135.

Задачи с развернутым ответом.

1. Площадь параллелограмма *ABCD* равна 180. Точка E — середина стороны *AB*. Найдите площадь трапеции *BCDE*.

Ответ: 135 .

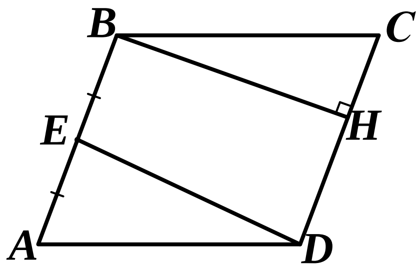
2. Площадь параллелограмма *ABCD* равна 32. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции *BCDE*.

Ответ: 24.

Пример решения задачи с развернутым ответом.

1. Площадь параллелограмма ABCD равна 180. Точка E — середина стороны *AB*. Найдите площадь трапеции *BCDE*.

Решение



Опустим из вершины *B* высоту *BH* на сторону *CD*, эта высота общая для параллелограмма *ABCD* и для трапеции *BCDE*.

$$S_{ABCD} = CD \cdot BH = 180$$

$$S_{BCDE} = \frac{\frac{CD}{2} + CD}{2} \cdot BH = \frac{3CD}{4} \cdot BH .$$

Т.к. $CD \cdot BH = 180$, то $S_{BCDE} = \frac{3 \cdot 180}{4}$.

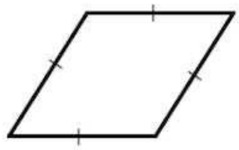
Ответ: 135.

Задание 2 решается аналогичным способом.

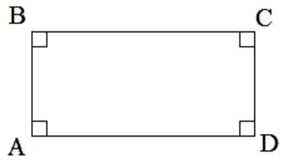
Занятие 26. Площадь прямоугольника, ромба, квадрата.

<u>Повторяем теорию.</u>

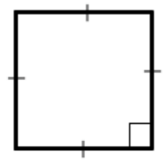
Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.



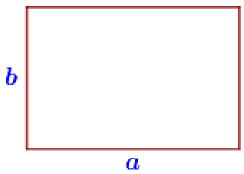
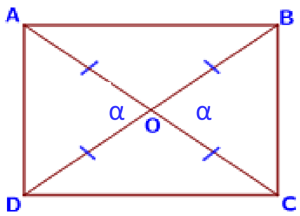
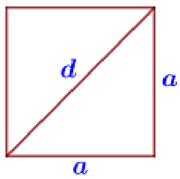
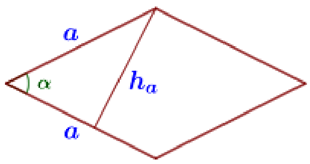
Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые.

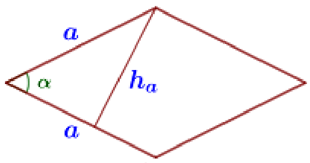


Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.



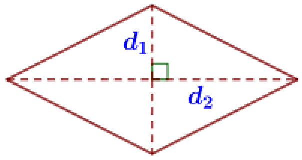
<u>Площади.</u>

Фигура	Формулировка	Формула
Прямоугольник 	Площадь прямоугольника равна произведению длин его смежных сторон	$S = a\,b$
	Площадь прямоугольника равна половине произведения квадрата его диагонали на синус угла между диагоналями	$S = \frac{1}{2}BD^2 \cdot \sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}AC^2 \cdot \sin\alpha$
Квадрат 	Площадь квадрата равна квадрату его стороны. Площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали.	$S = a^2$ $S = \frac{1}{2}d^2$
Ромб 	Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту.	$S = a\,h_a$



Площадь ромба равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

$S = a^2 \cdot \sin\alpha$



Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей

$S=\frac{1}{2}\, d_1 \cdot d_2$

Решаем устно.

1) Стороны прямоугольника равны 4 и 6. Найдите площадь прямоугольника.

Ответ 24.

2) Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$. Найдите площадь квадрата.

Ответ 32.

3) Сторона ромба равна 8, а синус угла между сторонами равен 0,5. Найдите площадь ромба.

Ответ 32.

Проверяем себя.

Т76. Какие из следующих утверждений верны?

1) Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, проведѐнную к этой стороне.

2) Площадь прямоугольника равна половине произведения квадрата его диагонали на синус угла между диагоналями.

3) Площадь ромба равна произведению его диагоналей.

4) Площадь параллелограмма равна произведению длин его сторон.

Ответ 12.

Т77. Какие из следующих утверждений верны?

1) Существует ромб, который не является квадратом.

2) Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.

3) Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Ответ 13.

Т78. Какие из следующих утверждений верны?

1) Площадь ромба равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

2) Площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали.

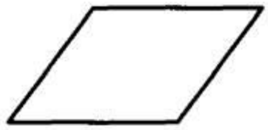
3) Сумма углов любого треугольника равна 180°.

4) Все квадраты имеют равные площади.

Ответ 123.

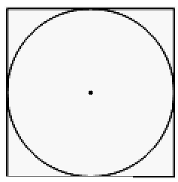
Решаем задачи

176. а) Периметр квадрата равен 20. Найдите площадь квадрата.
Ответ 25.
б) Периметр квадрата равен 28. Найдите площадь квадрата.
Ответ 49.
в) Периметр квадрата равен 84. Найдите площадь квадрата.
Ответ 441.
177. а) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 3.
Ответ 4,5.
б) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 40.
Ответ 800.
в) Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 5.
Ответ 12,5.



178. а) Периметр ромба равен 24, а один из углов равен 30°. Найдите площадь ромба.
Ответ 18.
б) Периметр ромба равен 36, а один из углов равен 30°. Найдите площадь ромба.
Ответ 40,5.
в) Периметр ромба равен 56, а один из углов равен 30°. Найдите площадь ромба.
Ответ 98.

179. а) Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 12 и 7.
Ответ 42.
б) Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 18 и 9.
Ответ 81.
в) Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 5 и 11.
Ответ 27,5.



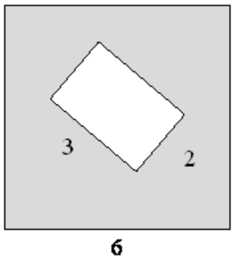
180. а) Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 3.
Ответ 36.
б) Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 7.
Ответ 196.
в) Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 8. *Ответ 256*.

181. а) Площадь ромба равна 60, а периметр равен 40. Найдите высоту ромба.
Ответ 6.

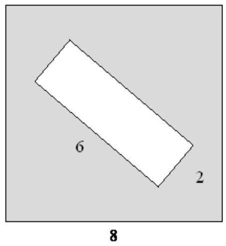
б) Площадь ромба равна 72, а периметр равен 72. Найдите высоту ромба.
Ответ 4.
в) Площадь ромба равна 54, а периметр равен 36. Найдите высоту ромба.
Ответ 6.

182. а) Из квадрата со стороной 6 вырезали прямоугольник. Найдите площадь получившейся фигуры, если стороны прямоугольника равны 2 и 3.

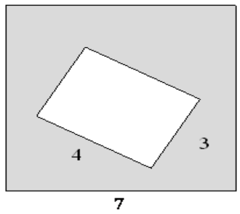
Ответ 30.



б) Из квадрата со стороной 8 вырезали прямоугольник. Найдите площадь получившейся фигуры, если стороны прямоугольника равны 6 и 2
Ответ 52.



в) Из квадрата со стороной 7 вырезали прямоугольник. Найдите площадь получившейся фигуры, если стороны прямоугольника равны 4 и 3.
Ответ 37.



<u>Задачи с развернутым ответом.</u>

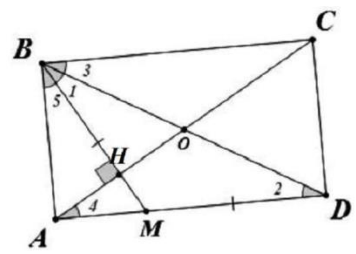
<u>1.</u> Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника ABCD перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудаленной от вершин B и D. Найдите площадь прямоугольника ABCD, если BC = $6\sqrt{3}$.
Ответ 36$\sqrt{3}$.

<u>2.</u> Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника ABCD перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудаленной от вершин B и D. Найдите площадь прямоугольника ABCD, если BC = 9.
Ответ: $27\sqrt{3}$.

Пример решения задачи с развернутым ответом

1. Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника ABCD перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудаленной от вершин B и D. Найдите площадь прямоугольника ABCD, если BC = $6\sqrt{3}$.

Решение.



Треугольник BMD – равнобедренный, так как BM =MD по условию. Тогда в треугольнике BM D углы 1 и 2 равны. Углы 2 и 3 равны как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BD.

Треугольник AOD – равнобедренный, так как AO =OD (BD = AC по свойству диагоналей прямоугольника: AO = OC = BO = OD), тогда углы 4 и 2 равны.

Прямоугольные треугольники ABC и BDA равны по катету и гипотенузе (AB- общий катет, BD = AC – гипотенузы). Тогда ∠BCA = ∠BDA.

H – точка пересечения отрезков BM и AC, где BM⊥AC по условию.

Треугольник ABM – прямоугольный, AH- высота, тогда из подобия прямоугольных треугольников углы 5 и 4 равны.

$\angle 5 = \angle 1 = \angle 3 = 90:3 = 30^0$.

В прямоугольном треугольнике BAC: AB = BC· tg 30^0. $6\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 6$

S_{ABCD} = AB · BC = 6 · $6\sqrt{3}$. = $36\sqrt{3}$.

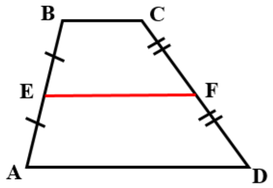
Ответ: $36\sqrt{3}$.

Решение задания 2 аналогичное.

Занятие 27. Площадь трапеции.

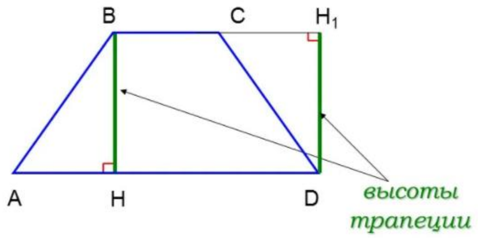
Повторяем теорию

Трапеция – выпуклый четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.



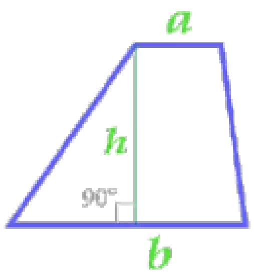
Средняя линия трапеции - отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Высота трапеции – это перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания на прямую, содержащую другое основание.



Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$$

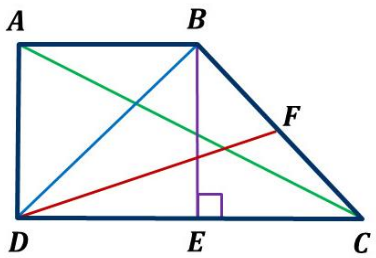


Проверяем себя.

Т79. Вставьте пропущенное слово:

а) Перпендикуляр трапеции, проведенный из любой точки одного из оснований на другое основание или его продолжение, называется _______.

б) Высотой трапеции ABCD является отрезок _____.



в) Площадь трапеции равна произведению полусуммы ________ на высоту.

г) Площадь трапеции равна произведению средней линии на _________.

Ответ: а) высотой; б) BE; в) оснований; г) высоту.

Т80. Выберите верное утверждение

Площадь трапеции равна ________________.

1) Произведению полусуммы длин ее оснований на высоту.

2) Произведению суммы длин ее оснований на высоту.

3) Половине произведения длины большего основания на высоту, проведенную к ней.

4) Произведению длин ее оснований.

Ответ: 1.

Т81. Выберите верное утверждение

Чтобы разделить трапецию на две равновеликие части одной прямой, пересекающей основание нужно:

1) провести прямую через середины оснований;

2) провести диагональ;

3) опустить высоту из вершины одного основания на другое.

Ответ: 1.

Решаем задачи.

183. а) Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна $4\sqrt{2}$, а угол между ней и одним из оснований равен 135°. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 60.

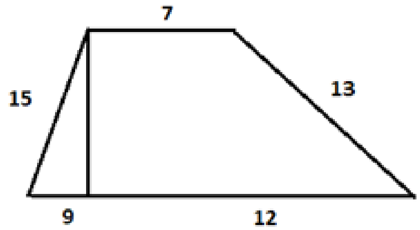
б) Основания трапеции равны 1 и 13, одна из боковых сторон равна $15\sqrt{2}$, а угол между ней и одним из оснований равен 135°. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 105.

в) Основания трапеции равны 18 и 10, одна из боковых сторон равна $4\sqrt{3}$, а угол между ней и одним из оснований равен 120°. Найдите площадь трапеции.

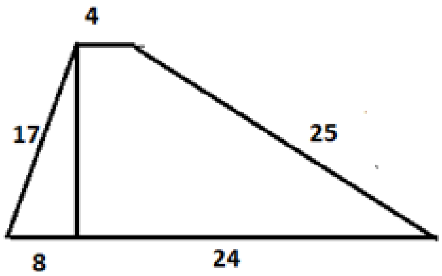
Ответ: 84.

184. а) Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



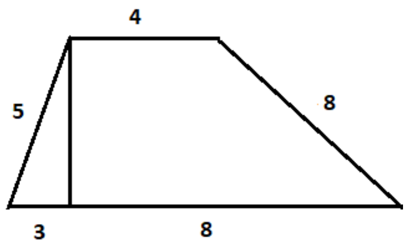
Ответ: 168.

б) Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: 270.

в) Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: 30.

185. а) Основания трапеции равны 9 и 54, одна из боковых сторон равна 27, а косинус угла между ней и большим основанием равен $\frac{\sqrt{65}}{9}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 378.

б) Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна 6, а косинус угла между ней и большим основанием равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 30.

в) Основания трапеции равны 7 и 49, одна из боковых сторон равна 18 , а косинус угла между ней и большим основанием равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$ Найдите площадь трапеции.

Ответ: 216.

186. а) Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна 6, а синус угла между ней и большим основанием равен $\frac{1}{3}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 30.

б) Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна 6, а синус угла между ней и большим основанием равен $\frac{1}{6}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 15.

в) Основания трапеции равны 9 и 72, одна из боковых сторон равна 30, а синус угла между ней и большим основанием равен $\frac{5}{9}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 675.

187. а) Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна 6, а тангенс угла между ней и большим основанием равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ:30.

б) Основания трапеции равны 2 и 16, одна из боковых сторон равна 6, а тангенс угла между ней и большим основанием равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 27.

в) Основания трапеции равны 9 и 45, одна из боковых сторон равна 25, а тангенс угла между ней и большим основанием равен $\frac{2\sqrt{77}}{77}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 150.

188. а) Основания равнобедренной трапеции равны 5 и 17, а ее боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 88.

б) Основания равнобедренной трапеции равны 50 и 104, боковая сторона 45. Найдите площадь трапеции.

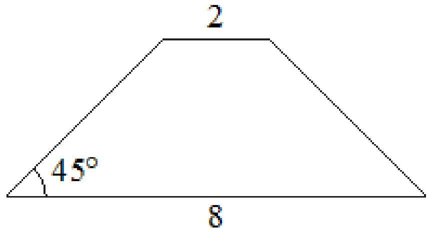
Ответ: 2772

в) Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 25, а её боковые стороны равны 13. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 240.

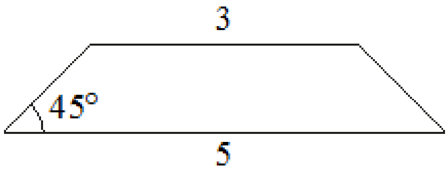
189. а) В равнобедренной трапеции основания равны 2 и 8, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45°. Найдите площадь этой трапеции.

Ответ: 15.



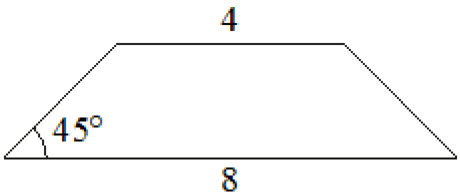
б) В равнобедренной трапеции основания равны 3 и 5, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45°. Найдите площадь этой трапеции.

Ответ:4.



в) В равнобедренной трапеции основания равны 4 и 8, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45°. Найдите площадь этой трапеции.

Ответ: 12.



<u>Задачи с развернутым ответом.</u>

<u>1.</u> В прямоугольной трапеции острый угол при основании равен 30°, а сумма оснований равна 12 и сумма боковых сторон равна 18. Вычислите площадь трапеции.

Ответ: 36.

<u>2.</u> Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 28 и 35, а основание BC равно 7. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

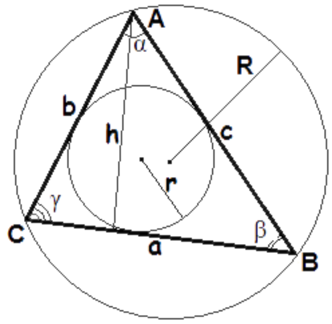
Ответ: 490.

Занятие 28. Площадь треугольника

Повторяем теорию.

Треугольник – это геометрическая фигура, образованная тремя отрезками, которые соединяют три точки, не лежащие на одной прямой. Отрезки называют сторонами треугольника, а точки – вершинами треугольника *Площадь треугольника* – это численная характеристика, характеризующая размер плоскости, ограниченной треугольником.

Вспомним обозначения и рассмотрим чертеж:



S - площадь треугольника, a, b, c - длины сторон треугольника,

h - высота треугольника, γ - угол между сторонами a и b,

r - радиус вписанной окружности, R - радиус описанной окружности.

Полупериметр треугольника $p = \frac{a+b+c}{2}$

1.Формула площади треугольника по стороне и высоте

Площадь треугольника равна половине произведения длины стороны треугольника на длину проведенной к этой стороне высоты.

$$S = \frac{1}{2}ah$$

2.Формула площади треугольника по трем сторонам

Формула Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

3.Формула площади треугольника по двум сторонам и углу между ними. *Площадь треугольника* равна половине произведения двух его сторон умноженного на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

4.Формула площади треугольника по трем сторонам и радиусу описанной окружности.

Площадь треугольника равна отношению произведения всех сторон треугольника к 4 радиусам описанной окружности

$$S = \frac{abc}{4R}$$

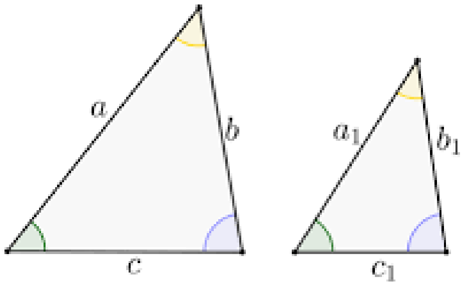
5.Формула площади треугольника по трем сторонам и радиусу вписанной окружности.

Площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника на радиус вписанной окружности.

$$S = p \cdot r$$

6.Свойство подобных треугольников.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

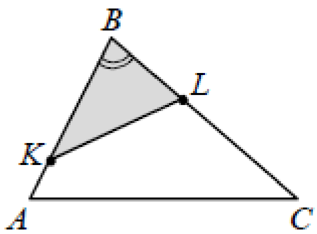


$$\frac{S_1}{S_2} = k^2, \text{где } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$$

7.Свойства площадей треугольников с равными углами.

Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

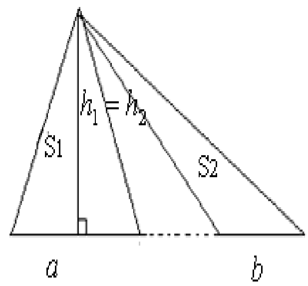
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BK \cdot BL}{AB \cdot BC}$$



8. Свойства площадей треугольников с равными высотами.

Если два треугольника имеют одинаковые высоты, то их площади относятся как длины оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).

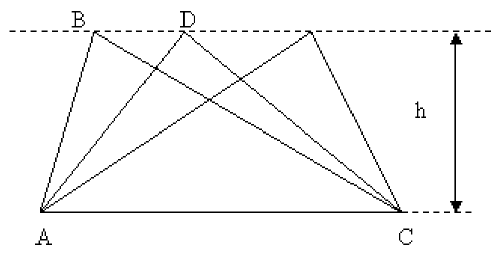
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$



9.Еще одно интересное свойство площадей

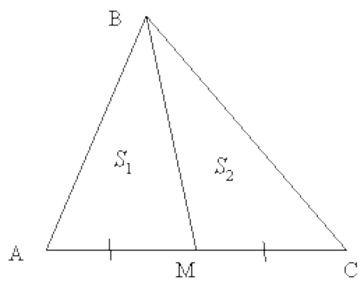
Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь при этом не изменится.

$S_1=S_2=\ldots S_n=h \cdot AC=const$



Треугольники называются *равновеликими*, если имеют одинаковую площадь.

10.Свойство медианы треугольника

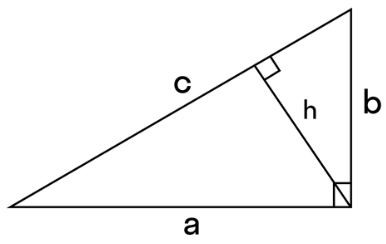


Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.

Если BM-медиана, то $S_1=S_2$

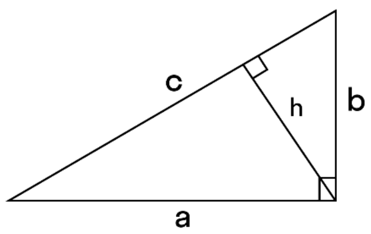
11.Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

$$S = \frac{ab}{2}$$

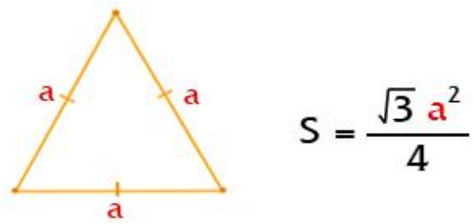


12.Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведенную к ней.

$$S = \frac{ch}{2}$$



13.Площадь равностороннего треугольника равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



Проверяем себя.

Т82. Какое из следующих утверждений верно?

1) В параллелограмме есть два равных угла.

2) Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его медианой.

3) Площадь прямоугольного треугольника равна произведению длин его катетов.

Ответ: 1

Т83. Какие из следующих утверждений верны?

1) Отрезки касательных, проведенные к окружности из одной точки, равны.

2) Длина любой хорды окружности не больше её радиуса.

3) Площадь треугольника равна произведению основания и проведенной к нему высоты.

Ответ: 1

Т84. Выберите верное утверждение:

1) Площадь параллелограмма равна произведению его диагоналей.

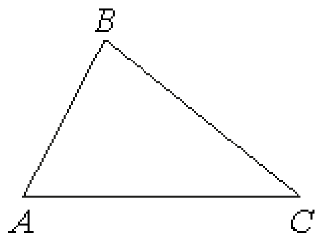
2) Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

3) Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Ответ: 23

<u>Решаем задачи.</u>

190. а) В треугольнике ABC известно, что AB=6, BC=10, $\sin\angle ABC = \frac{1}{3}$. Найдите площадь треугольника ABC.



Ответ:10.

б) В треугольнике ABC известно, что AB=14, BC=5, $\sin\angle ABC = \frac{6}{7}$. Найдите площадь треугольника ABC.

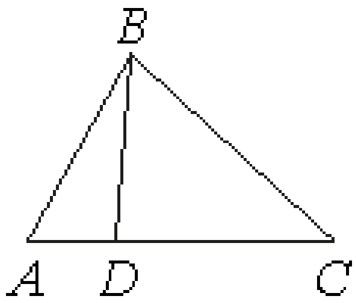
Ответ:30.

в) В треугольнике ABC известно, что AB=16, BC=25, $\sin\angle ABC = \frac{3}{10}$.

Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 60.

191. а) На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что AD=6, DC=10. Площадь треугольника ABC равна 48. Найдите площадь треугольника ABD.



Ответ: 18.

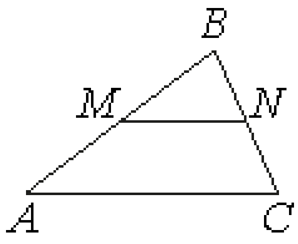
б) На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что AD=4, DC=7. Площадь треугольника ABC равна 55. Найдите площадь треугольника ABD.

Ответ: 20.

в) На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, то AD=2, DC=13. Площадь треугольника ABC равна 75. Найдите площадь треугольника ABD.

Ответ: 10.

192. а) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, AC=21, MN=14. Площадь треугольника ABC равна 27. Найдите площадь треугольника MBN.



Ответ: 12.

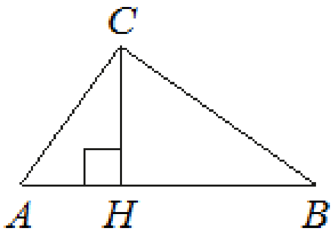
б) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, AC=27, MN=18. Площадь треугольника ABC равна 63. Найдите площадь треугольника MBN.

Ответ: 28.

в) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, AC=36, MN=27. Площадь треугольника ABC равна 96. Найдите площадь треугольника MBN.

Ответ: 54.

193. а). На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH, AH=2, BH=18. Найдите площадь треугольника.



Ответ: 60.

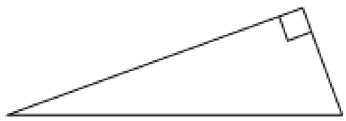
б). На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH, AH=4, BH=16. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 80.

в). На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH, AH=7, BH=28. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 245.

194.а) Катеты прямоугольного треугольника равны 10 и 24. Найдите площадь треугольника.



Ответ: 120.

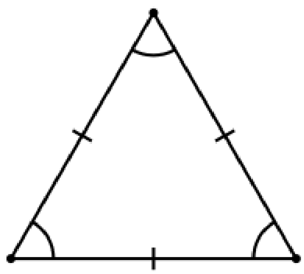
б) Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 15. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 150.

в) Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 5. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 30.

195. а) Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника, деленную на $\sqrt{3}$.



Ответ: 147.

б) Сторона равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника, деленную на $\sqrt{3}$.

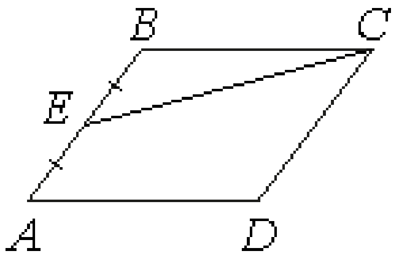
Ответ: 108.

в) Сторона равностороннего треугольника равна $10\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника, деленную на $\sqrt{3}$.

Ответ: 75.

196. а) Площадь параллелограмма ABCD равна 68. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 17.



б) Площадь параллелограмма ABCD равна 84. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 21.

в) Площадь параллелограмма ABCD равна 148. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

Ответ: 37.

<u>Задачи с развернутым ответом</u>

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 36. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

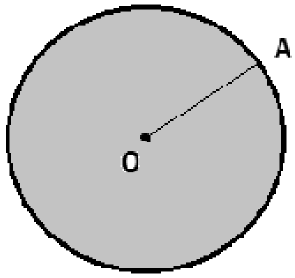
Ответ: $\frac{180}{13}$

2. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади параллелограмма.

Занятие 29: Площадь круга и его частей.

Повторяем теорию

Круг — это часть плоскости, ограниченная окружностью.



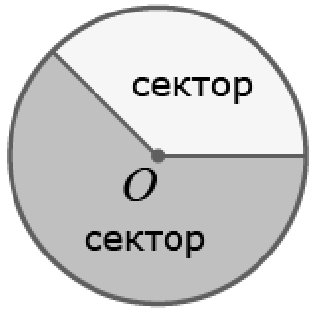
Центр данной окружности называется *центром круга*, а расстояние от центра до любой точки окружности — *радиусом круга.*

O — центр круга, OA — радиус круга.

Длина окружности — это длина замкнутой плоской кривой, ограничивающей круг.

$$C = 2\pi r.$$

Круговой сектор — это часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой. Два радиуса разделяют круг на два сектора.



Круговой сегмент — это часть круга, ограниченная дугой и стягивающей её хордой. Любая хорда делит круг на два сегмента.

Площадь круга

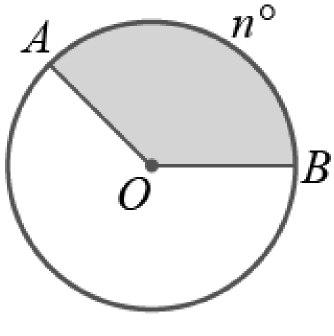
Площадь круга равна произведению числа π на квадрат радиуса.

$S = \pi r^2$, где S — площадь круга, а r — радиус круга.

Так как диаметр круга равен удвоенному радиусу, то радиус равен диаметру, разделённому на 2. Следовательно, формула нахождения площади круга через диаметр будет выглядеть так: $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

Площадь сектора.

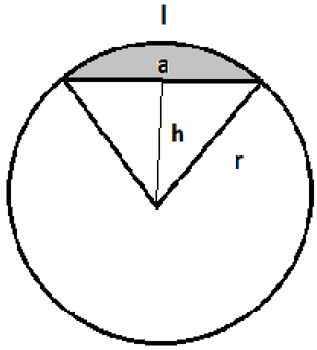
Чтобы найти площадь S кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой $n°$, надо использовать формулу:



$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot n$$

Площадь сегмента.

При отсечении части круга хордой можно рассмотреть две фигуры: это сегмент и равнобедренный треугольник, боковые стороны которого - радиусы круга.



Площадь сегмента можно найти как разность площадей сектора круга и этого равнобедренного треугольника.

$$S = \frac{1}{2}(rl - ah)$$

Проверяем себя.

Т85. Вставьте пропущенное слово:

а) Круг — это часть плоскости, ограниченная ________________.

б) Сектор — это часть круга, ограниченная двумя радиусами и ______.

в) Площадь круга равна произведению числа π на квадрат________.

г) Площадь сегмента можно найти как разность площадей ______ круга и равнобедренного треугольника.

Ответ: а) окружностью; б) дугой; в) радиуса; г) сектора.

Т86. Выберите верное утверждение

Круговым сегментом называется…

1) Часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, соединяющей концы этой дуги.

2) Часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.

3) Часть плоскости, ограниченная окружностью.

Ответ: 1.

Т87. Выберите верное утверждение

Чтобы найти площадь круга нужно:

1) число π умножить на радиус.

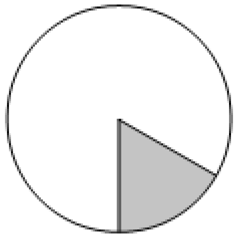
2) число π умножить на квадрат диаметра и разделить на четыре.

3) число π разделить на квадрат диаметра.

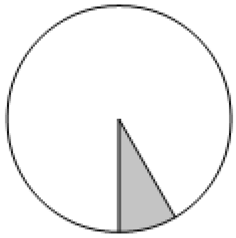
Ответ: 2.

Решаем задачи.

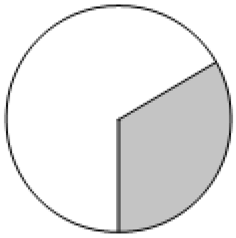
197. а) Площадь круга равна 90. Найдите площадь
сектора этого круга, центральный угол которого
равен 60°.
Ответ: 15.



б) Площадь круга равна 120. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 30°.
Ответ: 10.



в) Площадь круга равна 123. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 120°.
Ответ: 41.



198. а) Найдите площадь круга, если радиус равен 5. ($\pi \approx 3$).
Ответ: 75.
б) Найдите площадь круга, если радиус равен 8. ($\pi \approx 3$).
Ответ: 192.
в) Найдите площадь круга, если радиус равен 12. ($\pi \approx 3$).
Ответ: 432.

199. а) Найдите площадь кругового сектора, если радиус круга равен 3, а угол сектора равен 120°. В ответе укажите площадь, *деленную на* π.
Ответ: 3.
б) Найдите площадь кругового сектора, если радиус круга равен 4, а угол сектора равен 90^0. В ответе укажите площадь, *деленную на* π.
Ответ: 4.
в) Найдите площадь кругового сектора, если радиус круга равен 3,6, а угол сектора равен 300^0. В ответе укажите площадь, *деленную на* π.
Ответ: 10,8.

200. а) Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его
дуги равна 6π, а угол сектора равен 120°. В ответе укажите площадь, *деленную на* π.
Ответ: 27.

б) Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его дуги равна 3π, а угол сектора равен 240^0 . В ответе укажите площадь, *деленную на* π.

Ответ: 3.375

в) Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его дуги равна 5π, а угол сектора равен 36^0 . В ответе укажите площадь, *деленную на* π.

Ответ: 62,5.

201. а) Площадь сектора составляет 3/8 площади круга. Найдите центральный угол, соответствующий данному сектору.

Ответ:135.

б) Площадь сектора составляет 9/20 площади круга. Найдите центральный угол, соответствующий данному сектору.

Ответ: 162.

в) Площадь сектора составляет 8/15 площади круга. Найдите центральный угол, соответствующий данному сектору.

Ответ: 192.

202. а) Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 10, а градусная мера дуги сегмента равна 150^0. ($\pi \approx 3$).

Ответ: 100.

б) Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 4, а градусная мера дуги сегмента равна 150^0. ($\pi \approx 3$).

Ответ: 16.

в) Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 6, а градусная мера дуги сегмента равна 150^0. ($\pi \approx 3$).

Ответ: 36.

203. а) Найдите радиус круга, если площадь сектора этого круга равна $7{,}5\pi$, а

центральный угол, соответствующий этому сектору, равен 108^0.

Ответ: 5.

б) Найдите радиус круга, если площадь сектора этого круга равна 45π, а центральный угол, соответствующий этому сектору, равен 72^0.

Ответ: 15.

в) Найдите радиус круга, если площадь сектора этого круга равна 60π, а центральный угол, соответствующий этому сектору, равен 54^0.

Ответ: 20.

Задачи с развернутым ответом.

1. Найдите площадь круга, вписанного в сектор круга радиуса 20 см с хордой 10 см.

Ответ: 16π *см*^{2}.

2. Радиус круга равен 2см. По разные стороны от центра круга проведены две параллельные хорды, равные соответственно сторонам правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в данный круг. Найдите площадь части круга, находящегося между хордами.

Ответ: $2\pi + 2\sqrt{3}$.

Занятие 30. Итоговая проверочная работа.

К занятию представлен один тренировочный вариант, который есть в пособии для обучающихся (его можно дать в качестве домашнего задания), и два основных варианта. В каждом варианте предлагаются по 3 теоретических вопроса и 7 задач базового уровня сложности, по типу предлагаемых на ОГЭ по математике. Также представлены по 5 дополнительных, более сложных задач для каждого варианта.

Тренировочный вариант.

Проверяем себя.

Т88. Какое из следующих утверждений верно?

1) Все равнобедренные треугольники подобны.

2) Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

3) Сумма углов прямоугольного треугольника равна 90 градусам.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: 2.

Т89. Какие из следующих утверждений верны?

1) Сумма углов равнобедренного треугольника равна 180 градусам.

2) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой.

3) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен разности квадратов катетов.

В ответ запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 12.

Т90. Какое из следующих утверждений верно?

1) Диагональ трапеции делит её на два равных треугольника.

2) Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению гипотенузы к прилежащему к этому углу катету.

3) Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра окружности равно радиусу.

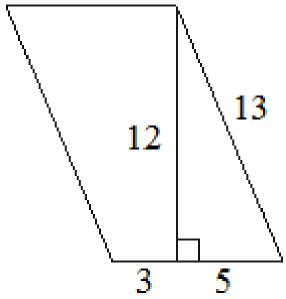
В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: 3.

<u>Решаем задачи.</u>

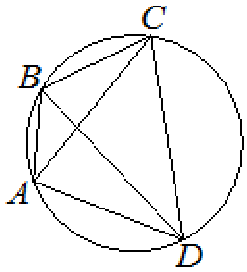
204. Биссектрисы $\angle B$ и $\angle C$ треугольника ABC пересекаются в точке N. Найдите $\angle BAC$, если $\angle$ BNC = 140^0.

Ответ: 100



205. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке.

Ответ: 96



206. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 138°, угол CAD равен 83°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 55

207. В параллелограмме ABCD стороны равны AB = 3 и BC = 8. Биссектриса $\angle ABC$ пересекает сторону AD в точке K. Найдите DK.

Ответ: 5

208. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $2\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.

Ответ: 6

209. Дан прямоугольный треугольник ABC, угол C прямой. Известно, что AB =18, BC = 9. Найдите sinA.

Ответ: 0,5

210. Касательные AB и AC касаются окружности с центром в точке O и радиусом, равным 3 см в точках B и C соответственно так, что AO=6 см. Найдите угол BAC.

Ответ: 60.

ВАРИАНТ 1

Теоретические вопросы

1. Какое из следующих утверждений верно?

1) Диагональ трапеции делит её на два равных треугольника.

2) Смежные углы всегда равны.

3) Площадь ромба равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

2. Какое из следующих утверждений верно?

1) Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его медианой.

2) Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

3) Касательная к окружности параллельна радиусу, проведённому в точку касания.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

3. Какие из следующих утверждений верны?

1) В параллелограмме есть два равных угла.

2) Площадь треугольника всегда меньше произведения двух его сторон.

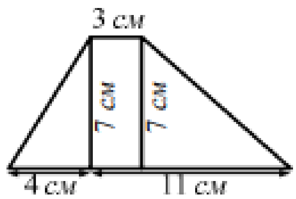
3) Средняя линия трапеции равна сумме её оснований.

В ответ запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

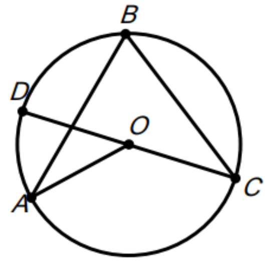
Задачи.

1. Биссектрисы $\angle B$ и $\angle C$ треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите $\angle BKC$, если $\angle B = 40^0$, а $\angle C = 80^0$.

2. Найдите площадь (в см^2) трапеции, изображенной на рисунке.



3. В окружность с центром O вписан $\angle ABC$, равный 50°. CD – диаметр. Найдите $\angle AOD$. Ответ дайте в градусах.



4. В параллелограмме ABCD стороны равны AB = 5 и BC = 8. Биссектриса ∠ABC пересекает сторону AD в точке K. Найдите AK.

5. Дан прямоугольный треугольник ABC, угол C прямой. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника,

если AC = 5, BC =12.

6. Дан прямоугольный треугольник ABC, угол C прямой. Известно, что AB =18, BC = 9. Найдите $cosB$.

7. Касательные AB и AC касаются окружности с центром в точке O и радиусом, равным 3 см в точках B и C соответственно так,

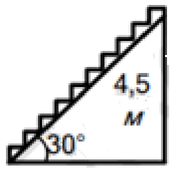
что AO=5 см. Найдите длину AC.

<u>Дополнительные задачи.</u>

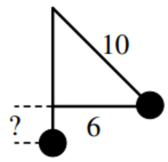
8. В параллелограмме ABCD проведена биссектриса AM. Известно, что ∠ MAD= 30^0. Найдите градусную меру ∠ABC.

9. В прямоугольнике ABCD одна из сторон равна 5, диагональ равна 13. Найдите площадь прямоугольника.

10. При проектировании торгового центра запланирована постройка эскалатора для подъема на высоту 4,5 м. Найдите длину эскалатора, если он расположен под углом 30°?



11. Маятник раскачивается на нити. Используя данные рисунка, определите, на какую высоту поднялся маятник.



12. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 94°, угол CAD равен 18°. Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.

ВАРИАНТ 2

Теоретические вопросы

1. Какое из следующих утверждений верно?

1) Угол, вписанный в окружность, равен соответствующему центральному углу, опирающемуся на ту же дугу.

2) Любой квадрат является прямоугольником.

3) Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его высотой.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

2. Какое из следующих утверждений верно?

1) Площадь трапеции равна произведению основания трапеции на высоту.

2) Две окружности пересекаются, если радиус одной окружности больше радиуса другой окружности.

3) Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

3. Какие из следующих утверждений верны?

1) Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

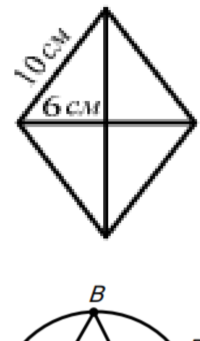
2) Боковые стороны любой трапеции равны.

3) Один из углов треугольника всегда не превышает 60 градусов.

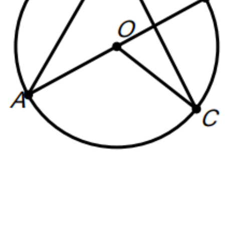
В ответ запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Задачи.

1. В равностороннем треугольнике ABC биссектрисы CN и AM пересекаются в точке P. Найдите ∠MPN.



2. Найдите площадь (в см^2) ромба, изображенного на рисунке.



3. В окружности с центром O ∠COD равен 40°. AD – диаметр. Найдите ∠ABC. Ответ дайте в градусах.

4. В параллелограмме ABCD стороны равны AB = 6 и BC = 7. Биссектриса ∠ABC пересекает сторону AD в точке M. Найдите BM, если ∠BAD= 60°.

5. Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если его сторона равна $\frac{15}{\sqrt{3}}$.

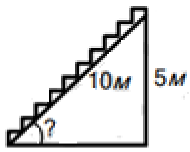
6. Дан прямоугольный треугольник ABC, угол C прямой. Известно, что AB = 5, AC = 3. Найдите $cosB$.

7. Касательная AC касается в точке B окружности с центром O и радиусом, равным 3 см так, что AB=BC=4 см. Найдите длину AO.

Дополнительные задания.

8. Площадь прямоугольника KLMN равна 12, а одна из сторон равна 4. Найдите диагональ прямоугольника.

9. При проектировании торгового центра запланирована постройка эскалатора для подъема на высоту 5 м. Под каким углом к горизонту необходимо расположить эскалатор, если длина его составляет 10 м?



10. Арине необходимо нарисовать окружность длиной 22π см. Ленту какой длины ей необходимо взять

11. Четырёхугольник вписан в окружность, два его соседних угла равны 93° и 105° соответственно. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

12. Найдите высоту трапеции, если её площадь равна 48, а средняя линия равна 8.

ОТВЕТЫ

вариант	теоретические вопросы			задачи						
	1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	3	2	12	120	63	80	5	6,5	0,5	4
2	2	3	13	120	96	70	6	5	0,8	5

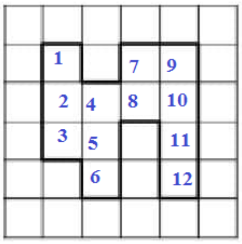
Ответы на дополнительные задания.

вариант	Задания				
	8	**9**	**10**	**11**	**12**
1	120	60	9	2	112
2	5	30	11	75	6

Занятие 31. Площади многоугольников, изображенных на клетчатой бумаге.

Повторяем теорию.

Чтобы найти площадь фигуры на клеточной бумаге площадь можно оценить квадратами со стороной в 1единичный отрезок, а также можно применить правила и формулы геометрии для нахождения площади фигуры, можно использовать метод вырезания или формулу Пика.



Оценка площади квадратами со стороной в 1 единичный отрезок.

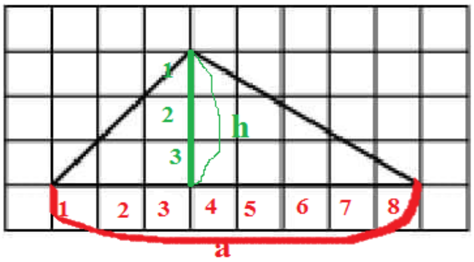
Площадь оценивают квадратами со стороной в 1 единичный отрезок, подсчитывая сетку из таких квадратов в фигуре.

Ответ 12.

Применение правила и формул геометрии для нахождения площади фигуры

Рассмотрим применение правила и формул геометрии на примерах задач:

Пример 1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



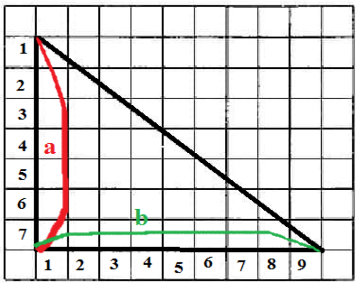
Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту

Основание a = 8 клеток, высота h = 3 клетки

$S=\frac{1}{2}\,a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=12$

Ответ 12

Пример 2. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Этот треугольник – прямоугольный.

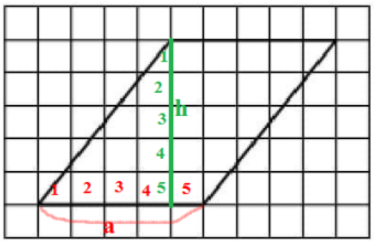
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов

Основание a = 7 клеток, высота b = 9 клеток

$\mathbf{S}=\frac{1}{2}\,a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 9=31{,}5$

Ответ 31,5.

Пример 3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите площадь этого параллелограмма.

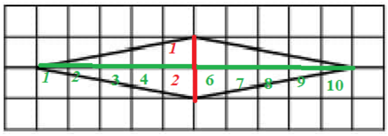


Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, проведенной к этой стороне.

Сторона a = 5 , высота h = 5

S = $a \cdot h_a = 5 \cdot 5 = 25$ *Ответ 25.*

Пример 4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите площадь этого ромба.



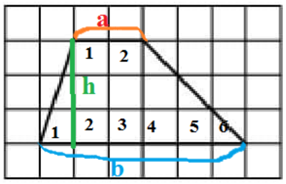
Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Диоганали равны: $d_1 = 2$ клетки, $d_2 = 10$ клеток.

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 = 10$$

Ответ 10.

Пример 5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту

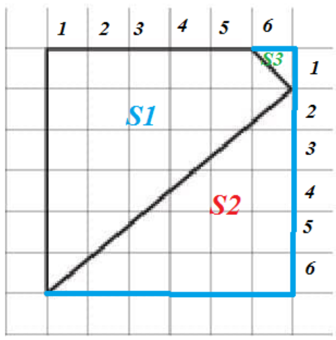
Основание a = 2 клетки, второе основание b = 6 клеток, высота h = 3 клетки.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (2 + 6) \cdot 3 = 12$$

Ответ 12

Метод вырезания.

Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке.



Дополним фигуру до прямоугольника. Прямоугольник будет состоять из нашей фигуры- 1 и двух прямоугольных треугольников - 2 и 3.

Площадь прямоугольника: **S =** $a \cdot b = 6 \cdot 6 = 36$

Площадь прямоугольного треугольника:

$$S_2 = \frac{1}{2} a \cdot b = 5 \cdot 6 : 2 = 15$$

Площадь прямоугольного треугольника:

$S_3 = 1 \cdot 1 : 2 = 0{,}5$

Из площади полученного прямоугольника вычтем площади прямоугольных треугольников:

$S_1 = 36 - 15 - 0{,}5 = 20{,}5$. *Ответ 20,5.*

Формула Пика.

Формула Пика (или теорема Пика) - классический результат комбинаторной геометрии и геометрии чисел, согласно которому *площадь многоугольника с целочисленными вершинами равна:*

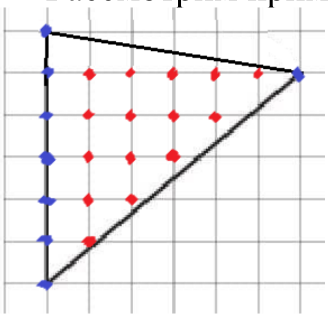
S = В + Г / 2 − 1,

где *В* - количество целочисленных точек внутри многоугольника,

Г - количество целочисленных точек на границе многоугольника.

Теорема(формула) Пика доказана Георгом Пиком в 1899 году.

Рассмотрим пример ее применения:



В =15, Г = 8

S = В + Г / 2 – 1 = 15 + 8:2 -1 = 18

Проверим методом вырезания:

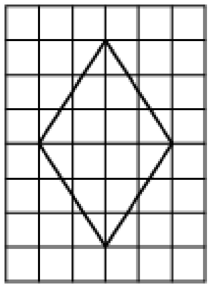
S =36 – 1/2·5·6 – 1/2·1·6 = 18

Ответ 18.

Проверяем себя.

Т91. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите площадь этого ромба. Выберите верный ответ.

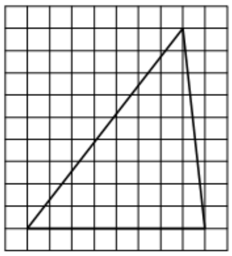
Варианты ответа: 1) 6; 2) 24; 3) 12



Ответ 3.

Т92. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь. Выберите верный ответ.

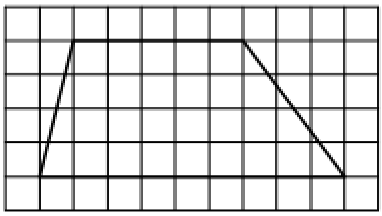
Варианты ответа: 1) 72; 2) 36; 3) 80.



Ответ 2.

Т93. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь. Выберите верный ответ.

Варианты ответа: 1) 14; 2) 7; 3) 28.

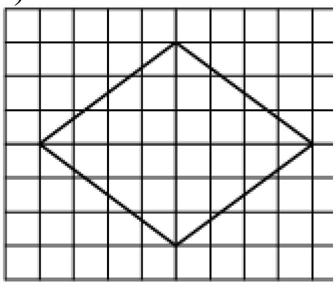


Ответ 3.

Решаем задачи.

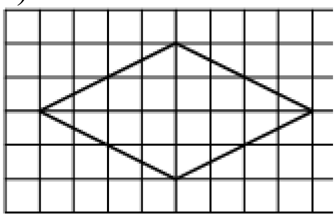
211.На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите площадь этого ромба.

а)



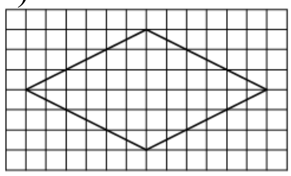
Ответ 24.

б)



Ответ 16.

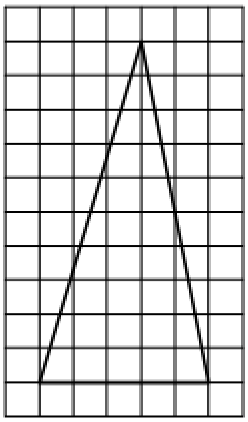
в)



Ответ 36.

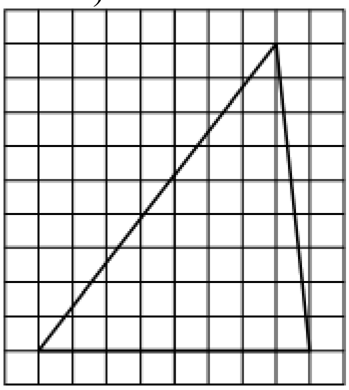
212.На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите площадь этого треугольника.

а)



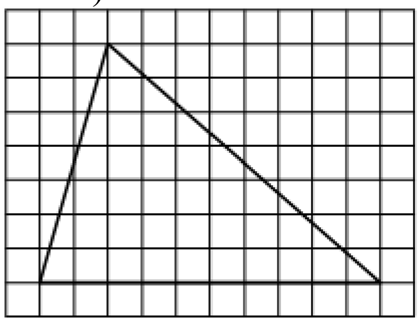
Ответ 25.

б)



Ответ 36.

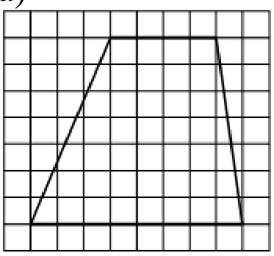
в)



Ответ 35.

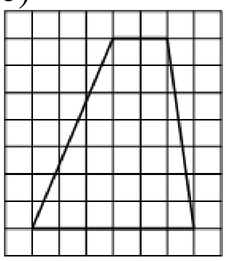
213.На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите площадь этой трапеции.

а)



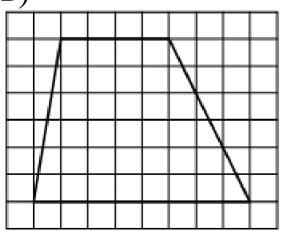
Ответ 42.

б)



Ответ 28.

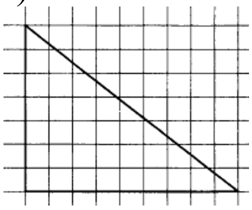
в)



Ответ 36.

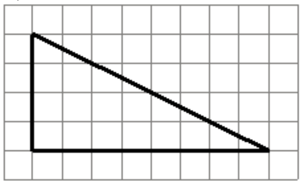
214.На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите площадь этого треугольника.

а)



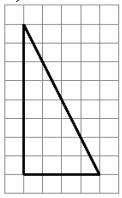
Ответ 31,5.

б)



Ответ 16.

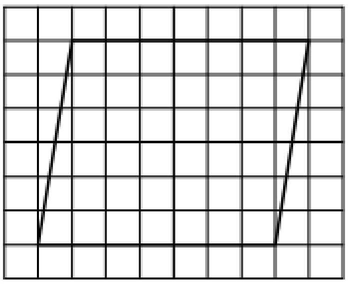
в)



Ответ 16.

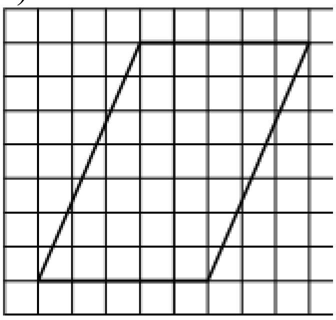
215.На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите площадь этого параллелограмма.

а)



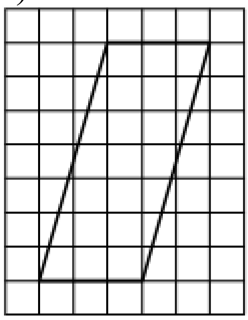
Ответ 42.

б)



Ответ 35.

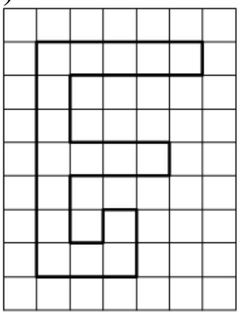
в)



Ответ 21.

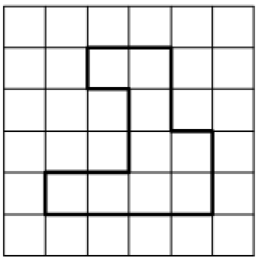
216.На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.

а)



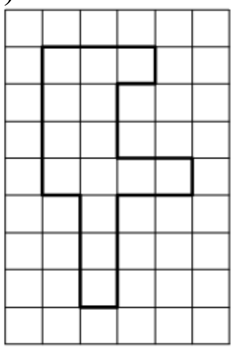
Ответ 17.

б)



Ответ 9.

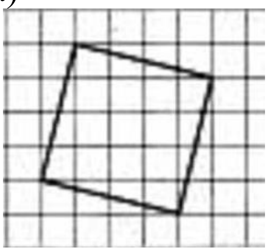
в)



Ответ 14.

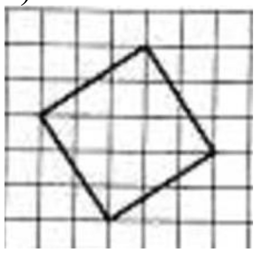
217. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.

а)



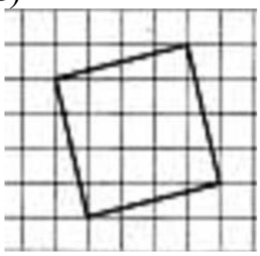
Ответ 17.

б)



Ответ 13.

в)



Ответ 17.

Задачи с развернутым ответом.

1. Сумма диагоналей ромба равна 70 см, а его периметр равен 100 см. Найдите площадь этого ромба.

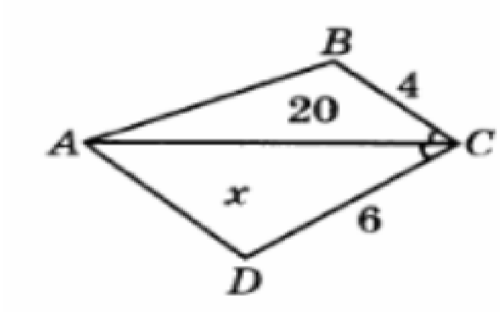
Ответ 600 см^2.

2. Найдите площадь ромба, периметр которого равен 60 см, а разность диагоналей равна 6см.

Ответ 21 6см^2.

3. Найти площадь треугольника *ACD*.

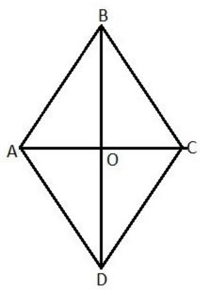
Ответ: 30.



Пример решения задачи с развернутым ответом

Задача 1.Сумма диагоналей ромба равна 70 см, а его периметр равен 100 см. Найдите площадь этого ромба.

Решение



По условию ABCD – ромб, где BD + AC =70;

AB+ BC+ CD +AD = 100, так как стороны ромба равны, то 4AB = 100,

AB =25, AO + OB = 70:2 = 35.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AOB (AC⊥ BD по свойству ромба).

По теореме Пифагора : $AB^2 = AO^2 + BO^2$.

Где AO = 35 – OB. Пусть BO = x.

Тогда составим уравнение: $(35- x)^2 + x^2 = 25^2$.

$35^2 – 70x + x^2 + x^2 = 25^2$;

$2x^2 – 70x + 1225 - 625 = 0$;

$2x^2 – 70x + 600 = 0$;

$x^2 – 35x + 300 = 0$;

x =20 или x = 15, пусть BO = 20, тогда AO = 35 – 20 =15.

Диагонали BD = 2· 20 =40 и AC = 2·15 = 30.

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

S *ABCD* = $\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 = 600$.

Ответ 600 см^2.

Задача 2 решается аналогично задаче 1.

Занятие 32. Площади многоугольников, изображенных на клетчатой бумаге.

Проверяем себя.

Т94. Какое из следующих утверждений верно?

1) Площадь прямоугольника равна произведению длин его смежных сторон.

2) Если диагонали выпуклого четырѐхугольника равны и перпендикулярны,

то этот четырѐхугольник является квадратом.

3) Все прямоугольные треугольники подобны.

Ответ 1.

Т95. Какие из следующих утверждений верны?

1) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен разности квадратов катетов.

2) Диагонали ромба перпендикулярны.

3) Любой квадрат является ромбом.

Ответ 23.

Т96. Какие из следующих утверждений верны?

1) В параллелограмме есть два равных угла.

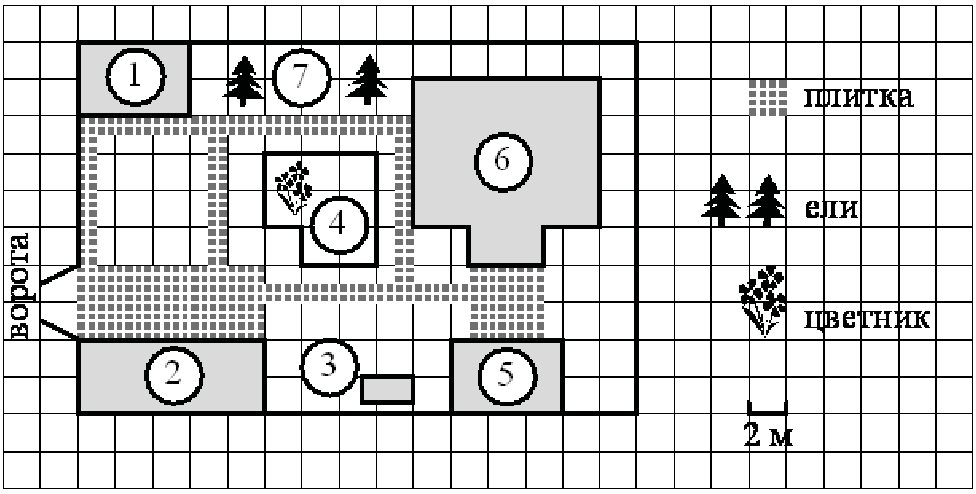
2) Площадь трапеции равна произведению основания трапеции на высоту**.**

3) Площадь треугольника меньше произведения двух его сторон.

Ответ 13.

Решаем задачи.

218.



На плане изображено домохозяйство по адресу: СНТ «Прибор», 2-я Линия, д. 26 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота. При входе на участок справа от ворот находится гараж, а слева в углу участка расположен сарай, отмеченный на плане цифрой 1. Площадь, занятая сараем, равна 24 кв. м. Жилой дом находится в глубине территории и обозначен на плане цифрой 6. Помимо гаража, жилого дома и сарая, на участке имеется летняя беседка, расположенная напротив входа в дом, и мангал рядом с ней. На участке также растут ели. В центре участка расположен цветник. Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 50 см×50 см. Перед гаражом и между домом и беседкой имеются площадки площадью 40 и 16 кв. м соответственно, вымощенные такой же плиткой. К домохозяйству подведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение.

а) Найдите площадь, которую занимает цветник. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ 32 .

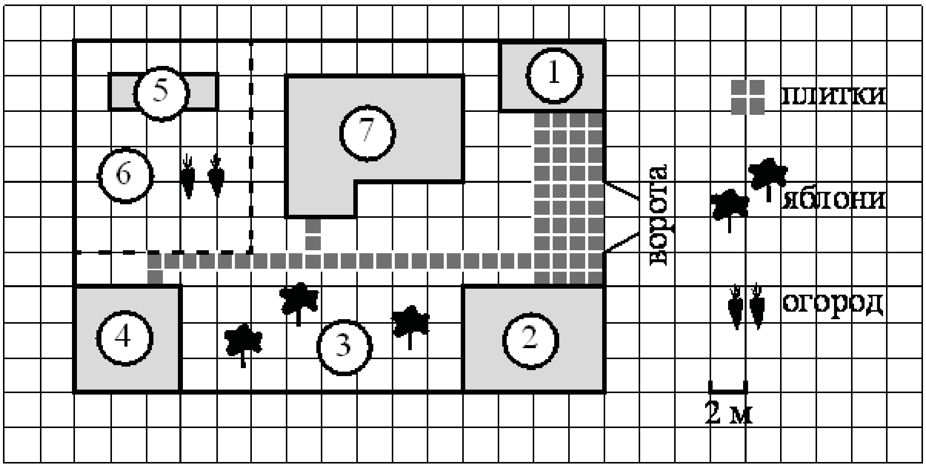
б) Найдите площадь, которую занимает жилой дом. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ 88.

в) Тротуарная плитка продаётся в упаковках, рассчитанных на 3,5 кв. м. Сколько упаковок такой плитки понадобилось, чтобы выложить все дорожки и обе площадки?

Ответ31.

219.



На плане изображён дачный участок по адресу: п. Сосновка, ул. Зелёная, д. 19 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота. При входе на участок слева от ворот находится гараж. Справа от ворот находится сарай площадью 24 кв. м, а чуть подальше — жилой дом. Напротив жилого дома расположены яблоневые посадки. Также на участке есть баня, к которой ведёт дорожка, выложенная плиткой, и огород с теплицей внутри (огород отмечен на плане цифрой 6). Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 1 м×1 м. Между гаражом и сараем находится площадка, вымощенная такой же плиткой. К участку подведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение.

а) Найдите площадь, которую занимает гараж. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ 48.

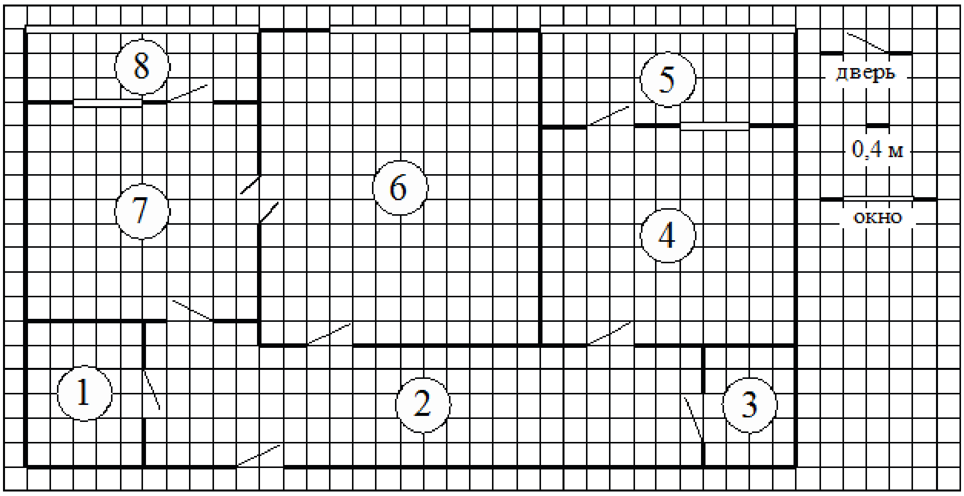
б) Найдите площадь открытого грунта огорода (вне теплицы). Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ 108.

в) На сколько процентов площадь, которую занимает гараж, больше площади, которую занимает теплица?

Ответ: 75.

220.



На рисунке изображён план двухкомнатной квартиры в многоэтажном жилом доме. Сторона одной клетки на плане соответствует 0,4 м, а условные обозначения двери и окна приведены в правой части рисунка. Вход в квартиру находится в коридоре. Слева от входа в квартиру находится санузел, а в противоположном конце коридора – дверь в кладовую. Рядом с кладовой находится спальня, из которой можно пройти на одну из застеклённых лоджий. Самое большое по площади помещение – гостиная, откуда можно попасть в коридор и на кухню. Из кухни также можно попасть на застеклённую лоджию.

а) Найите площадь гостиной. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ 24,96.

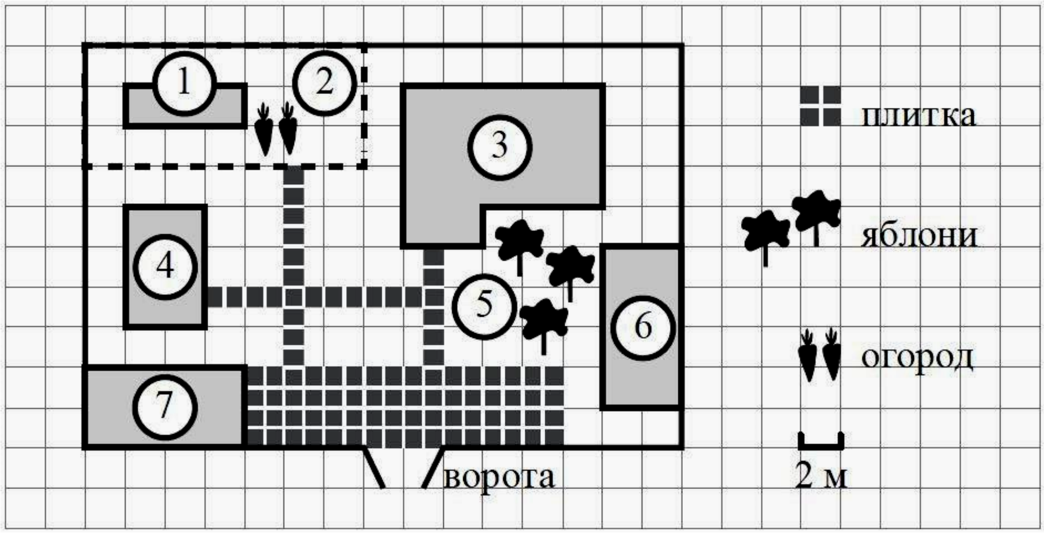
б) На сколько процентов площадь коридора больше площади кухни?

Ответ: 25.

в) Паркетная доска размером 20 см на 80 см продаётся в упаковках по 12 штук. Сколько упаковок паркетной доски понадобилось, чтобы выложить пол в спальне?

Ответ9.

221.



На плане изображено домохозяйство по адресу: с. Авдеево,3-й Поперечный пер., д. 13 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота. При входе на участок справа от ворот находится баня, а слева — гараж, отмеченный на плане цифрой 7. Площадь, занятая гаражом, равна 32 кв. м. Жилой дом находится в глубине территории. Помимо гаража, жилого дома и бани, на участке имеется сарай (подсобное помещение), расположенный рядом с гаражом, и теплица, построенная на территории огорода (огород отмечен цифрой 2). Хозяин дачного участка построил баню с парным отделением. Парное отделение имеет размеры: длина 3,5 м, ширина 2,2 м, высота 2 м. Окон в парном отделении нет, для доступа внутрь есть дверь шириной 60 см, высота дверного проёма 1,8 м. Для прогрева можно использовать электрическую или дровяную печь.

а) Найдите суммарную площадь стен парного отделения бани (без площади двери). Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: 21,72.

б) Найдите площадь потолка парного отделения бани. Ответ дайте в квадратных метрах.

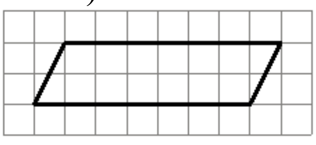
Ответ: 7,7.

в) Найдите площадь пола всей бани. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: 32.

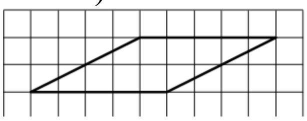
222. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите площадь этого параллелограмма.

а)



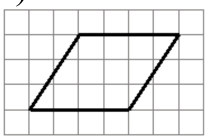
Ответ14.

б)



Ответ 10.

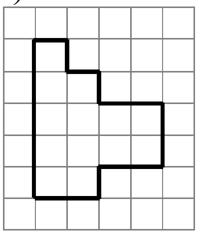
в)



Ответ12.

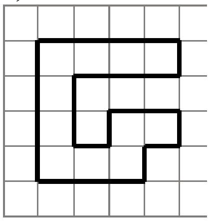
223. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.

а)



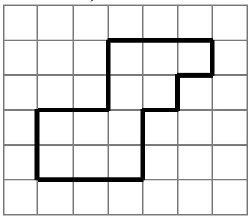
Ответ 13.

б)



Ответ 11.

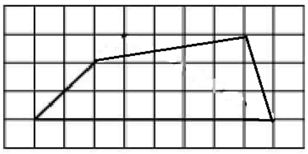
в)



Ответ 11.

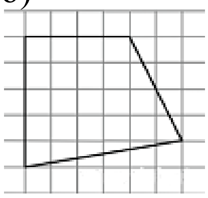
224. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.

а)



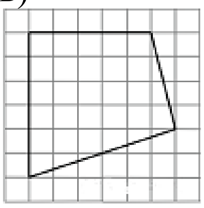
Ответ 16

б)



Ответ 23.

в)



Ответ 28.

<u>Задачи с развернутым ответом.</u>

1. Площадь треугольника ABC равна 56 см^2. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

Ответ 42 см^2.

2. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 12,15 и 21.

Ответ $48\sqrt{6}$.

3. Биссектрисы углов A и B параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если BC = 7, а расстояние от точки K до стороны AB равно 4.

Ответ 56.

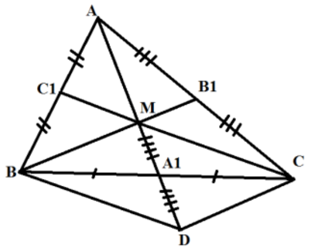
4. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если BC=2, а расстояние от точки K до стороны AB равно 8.

Ответ 32.

Пример решения задач с развернутым ответом.

Задание 1. Площадь треугольника ABC равна 56 см^2. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

Решение.



Пусть M- точка пересечения медиан треугольника ABC. A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB.

S_{ABC} = 56см^2. S_1 – площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

На продолжении медианы MA_1треугольника BMC за точку A_1 отложим отрезок $A_1D = A_1M$.

BMCD – параллелограмм по признаку диагоналей (диагонали BC и MD четырехугольника BMCD точкой пересечения делятся пополам: $MA_1 = A_1D$, $BA_1 = A_1C$). Тогда CD = BM, CM = BD по свойству параллелограмма.

По свойству медиан AM : MA_1= 2:1. Тогда AM = 2 MA_1 =M D. M D = $\frac{2}{3}$ AA_1,

CD = BM = $\frac{2}{3}BB_1$, CM = BD = $\frac{2}{3}CC_1$. Значит треугольник, стороны которого равны медианам треугольника ABC, подобен треугольнику MDC по трем сторонам. Тогда площадь треугольника S1, стороны которого равны медианам треугольника ABC: S1=$(\frac{3}{2})^2$ S_{MDC} = $\frac{9}{4}$ S_{MDC} .

Известно, что медианы разбивают треугольник на 6 равновеликих треугольников, тогда $S_{A1MC} = \frac{1}{6} S_{ABC}$, $S_{MDC} = 2\ S_{A1MC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$

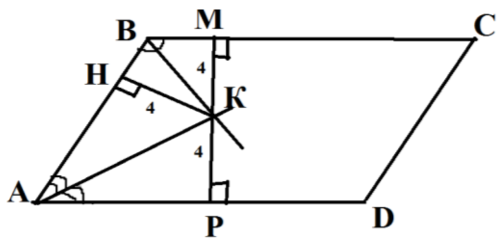
S1= $\frac{9}{4} S_{MDC} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{4} \cdot 56 = 42$см^2.

Ответ 42см^2.

Задание 2 решается аналогично заданию 1.

Задание 3. Биссектрисы углов А и В параллелограмма *ABC D* пересекаются в точке К. Найдите площадь параллелограмма, если ВС = 7, а расстояние от точки К до стороны АВ равно .4.

Решение.



В параллелограмме *ABCD* расстояние от точки К до стороны АВ – это перпендикуляр КН = 4. Опустим перпендикуляр КР на сторону AD параллелограмма. Прямоугольные треугольники АКН = АКР по гипотенузе и острому углу (∠НАК =∠*KAP,* АК- общая сторона). Тогда НК = КР =4. Прямоугольные треугольники ВКН = ВКМ по гипотенузе и острому углу (∠НВК = ∠*KBM,* ВК- общая сторона). Тогда НК = КМ =4. МР – высота параллелограмма, МР = 8.

Площадь параллелограмма $S_{ABCD} = BC \cdot MP = 7 \cdot 8 = 56$

Ответ: 56.

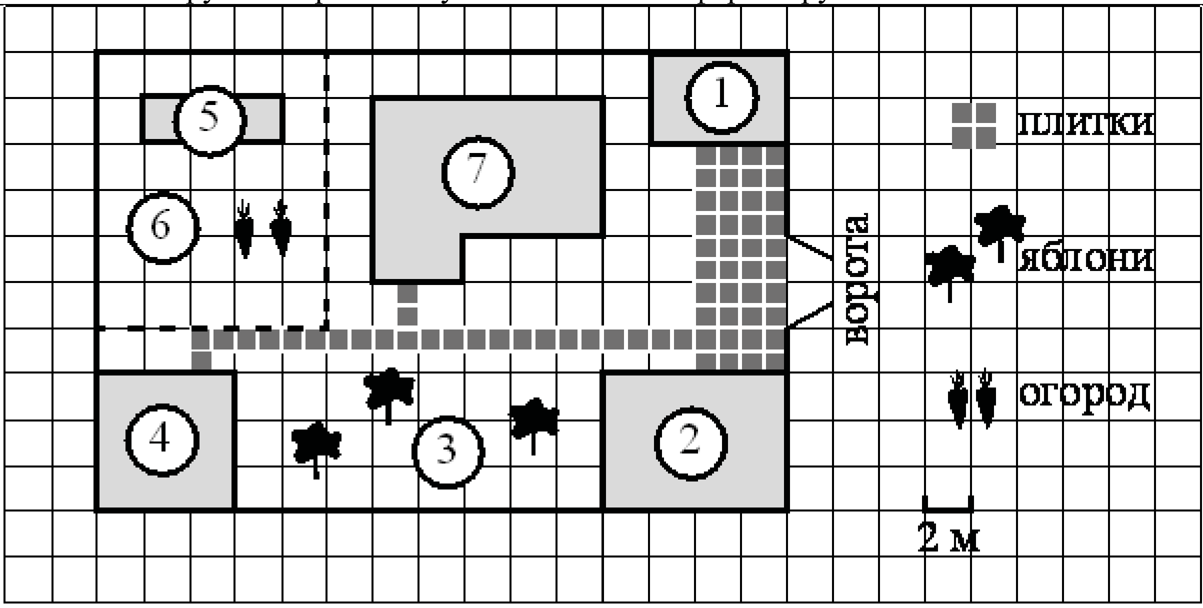
Задание 4 решается аналогично заданию 3.

Занятие 33. Практическая работа по теме: «Площади фигур».

На занятии предполагается проведение практической работы по двум вариантам с делением класса на группы, пары с последующим обсуждением ответов. Возможно проведение работы по одному варианту по желанию учителя. В работе содержатся 3 теоретических вопроса и 7 заданий базового уровня сложности по типу предлагаемых в ОГЭ по математике.

Вариант1	**Вариант 2**
1. Какие утверждения верны: 1) Площадь треугольника меньше произведения двух его сторон. 2) Средняя линия трапеции равна сумме её оснований. 3) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны	**1**. Какое утверждение верно: 1) Все диаметры окружности равны между собой. 2) Диагональ трапеции делит её на два равных треугольника. 3) Площадь любого параллелограмма равна произведению длин его сторон.
2. Какое утверждение верно: 1) Все квадраты имеют равные площади. 2) Основания равнобедренной трапеции равны. 3)Через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести две касательные к этой окружности.	**2**. Какое утверждение верно: 1) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является квадратом. 2) Сумма углов равнобедренного треугольника равна 180 градусам. 3) Площадь трапеции равна произведению основания трапеции на высоту.
3. Какие утверждения верны: 1) Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра окружности равно радиусу. 2) Площадь трапеции равна произведению основания трапеции на высоту. 3) Треугольника со сторонами 1, 2, 4 не существует.	**3**. Какие утверждения верны: 1) Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне. 2) Две окружности пересекаются, если радиус одной окружности больше радиуса другой окружности. 3) Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.
Внимательно рассмотрите рисунок и выполните задания	
На рисунке представлен план садового участка. На плане объекты обозначены следующими цифрами: сарай - 1, гараж - 2, яблоневые посадки -3, баня - 4, теплица - 5, огород - 6, жилой дом - 7. Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 1 м×1 м. Между гаражом и сараем находится площадка, вымощенная такой же плиткой.	

Хозяин планирует построить на участке бассейн в форме круга.



4.Плитки для садовых дорожек продаются в упаковках по 10 штук. Сколько упаковок плиток понадобилось, чтобы выложить все дорожки и площадку между сараем и гаражом?	**4**.Плитки для садовых дорожек продаются в упаковках по 8 штук. Сколько упаковок плиток понадобилось, чтобы выложить все дорожки и площадку между сараем и гаражом?
5.Найдите расстояние от жилого дома до гаража (расстояние между двумя ближайшими точками по прямой) в метрах.	5.Найдите расстояние от жилого дома до сарая (расстояние между двумя ближайшими точками по прямой) в метрах.
6.Найдите площадь, которую занимает гараж. Ответ дайте в квадратных метрах.	**6.**Найдите площадь, которую занимает баня. Ответ дайте в квадратных метрах.
7.Найдите площадь открытого грунта огорода (вне теплицы). Ответ дайте в квадратных метрах.	**7**.Найдите площадь, которую занимает жилой дом. Ответ дайте в квадратных метрах.
8.Сколько процентов от площади всего участка занимают строения (жилой дом, гараж, сарай, баня)? Ответ округлите до целого.	**8**.Сколько процентов от площади всего участка занимает плитка (дорожки и площадка)? Ответ округлите до целого.
9. Предполагаемая площадь дна кругового бассейна равна 90. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 60°.	**9**. Предполагаемая площадь дна кругового бассейна равна 120. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 30°.
10. Дан круговой бассейн. Известно, что длина ограничивающей его окружности равна 72π. Найдите площадь дна бассейна. В ответ запишите площадь, *деленную на* π.	**10.** Дан круговой бассейн. Известно, что длина ограничивающей его окружности равна 6π. Найдите площадь дна бассейна. В ответ запишите площадь, *деленную на* π.

Ответы

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1вариант	13 или 31	3	13 или 31	7	6	48	108	29	15	1296
2вариант	1	2	1	9	2	36	68	11	10	9

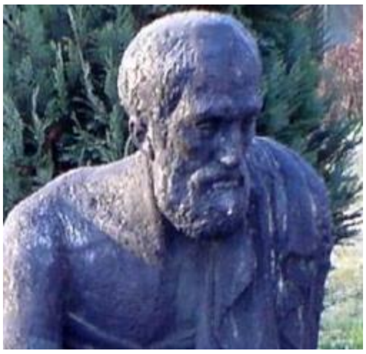
Занятие 34. Занятие по обобщению и систематизации знаний за курс.

Итоговое занятие по обобщению и систематизации знаний за курс учитель проводит по своему усмотрению в зависимости от результатов проверочных работ и уровня подготовки выпускников к экзамену по математике. Возможно, организовать на занятии работу по разноуровневым группам, парам, предложить задачи повышенного уровня сложности, повторить теоретический материал, формулы, индивидуальные карточки по «проблемным» темам и т.д.

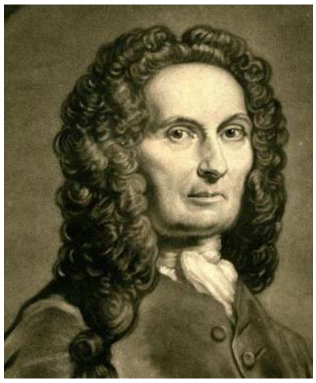
Исторические сведения

«Интересные факты о математиках»

Многие впоследствии великие математики не отличались хорошим поведением в школе и успеваемостью. К таким "нерадивым" ученикам можно отнести Исаака Ньютона. Он числился в ряду едва успевающих. Взялся за ум учёный лишь после того, как один из его преуспевающих одноклассников назвал его глупцом.



Архимед при помощи математических расчетов помог сконструировать жителям родного города Сиракузы множество всевозможных механизмов, которые успешно помогали обороняться в войне против римлян. На что Марцелл вынужден был однажды сказать: «Надо прекратить войну против геометра». Только измена жителей помогла римлянам проникнуть в Сиракузы.

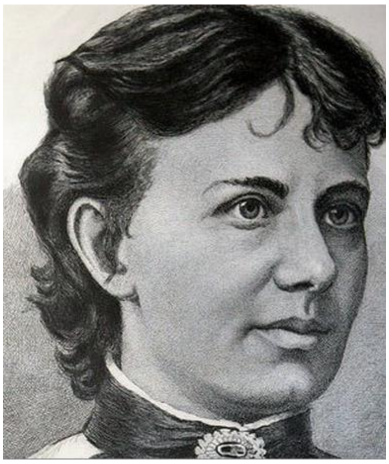


Известный английский математик, Абрахам де Муавр, на склоне лет своей жизни обнаружил, что длительность его сна ежедневно увеличивается на 15 минут. Составив несложную арифметическую прогрессию, высчитал дату, в которую длительность его сна составит 24 часа – 27 ноября 1754 года. Примечателен тот факты, что именно в этот день он и умер.

Однажды, в свою студенческую пору, американский математик Джордж Данциг опоздал на занятия и ошибочно принял, записанные на доске уравнения, как домашнее задание. Оно оказалось сложным, но Данциг с ним справился. По прошествии времени выяснилось, что он решил 2 «нерешаемых» проблемы в статистике, над которыми ученые бились долгое время.

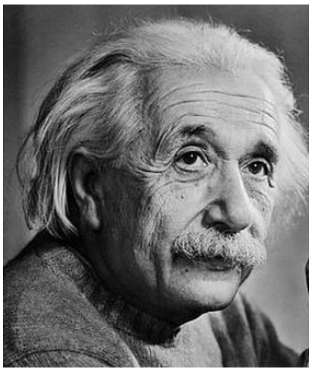
Далеко не все, даже великие математики, умеют быстро производить в уме простые арифметические действия. Примером тому, может быть случай происшедший с немецким математиком Эрнстом Куммером — большим знатоком теории чисел, умевшим оперировать сложнейшими математическими понятиями. Однажды, по ходу лекции, он замешкался, пытаясь умножить 7 на 9. Студенты, ради шутки, предложили ему 2 варианта, и оба неверных – 61 и 66.

Михаилу Михайловичу Остроградскому, российскому математику очередная догадка пришла прямо на улице во время прогулки. Ученый не растерялся и нашел какую-то черную вертикальную поверхность и начал на ней спешно делать записи. Однако, вместо того чтобы находится в состоянии покоя «доска» начала вдруг спешно удаляться! Только спустя некоторое время ученый понял, что это был бортик отъезжающей кареты.



Русская женщина-математик, Софья Васильевна Ковалевская, с математикой была уже знакома ещё с раннего детства. При ремонте, на её комнату не хватило обоев, поэтому, вместо них, были наклеены листы из лекций Михаила Михайловича Остроградского по дифференциальному и интегральному исчислениям. Ради продолжения своей научной карьеры, Софье Васильевне Ковалевской пришлось на время оформить фиктивный брак. В Российской империи, женщинам не положено было заниматься наукой. К тому же, её отец всячески препятствовал выезду дочери заграницу. Единственным способом покинуть страну было замужество. По прошествии времени, фиктивный брак перерос в реальный, в котором Софья Васильевна родила дочь.

Одна знакомая дама просила Эйнштейна позвонить ей, но предупредила, что номер ее телефона очень сложно запомнить: — 24-361. Запомнили? Повторите! Удивленный Эйнштейн ответил: — Конечно, запомнил! Две дюжины и 19 в квадрате



Александр Мелентьевич Волков, по образованию был математиком и преподавал её в одном из московских институтов, В конце 1930-х годов он увлёкся английским языком и для развития своих практических навыков решил самостоятельно перевести известную в то время сказку «Удивительный волшебник из страны Оз» американского писателя Лаймена Фрэнка Баума, чтобы потом пересказать её своим детям. Сказка пришлась им по вкусу, и они стали требовать от него её продолжения занимательной истории. В связи с этим, ученый стал придумывать от себя всё новые и новые истории. Рукопись была одобрена Самуилом Яковлевичем Маршаком и была, впоследствии переведена на 13 языков. Так родилось известное нам литературное произведение «Волшебник Изумрудного города» и ряд других сказок о жителях и приключениях Волшебной страны.

Леонардо да Винчи вывел правило, согласно которому квадрат диаметра ствола дерева равен сумме квадратов диаметров ветвей, взятых на общей фиксированной высоте. Более поздние исследования подтвердили его с одним лишь отличием — степень в формуле необязательно равняется 2, а лежит в пределах от 1,8 до 2,3. Традиционно считалось, что эта закономерность объясняется тем, что у дерева с такой структурой оптимальный механизм снабжения веток питательными веществами. Однако в 2010 году американский физик Кристоф Эллой нашёл более простое механическое объяснение феномену: если рассматривать дерево как фрактал, то закон Леонардо минимизирует вероятность слома веток под воздействием ветра.

«Ромб»

Ромб - один из фундаментальных символов, впервые появившийся на территории нашей страны в эпоху энеолита (памятники Трипольской культуры). Ромб обозначал представление тогдашнего человека об окружающем мире, о реальности, наполненную непонятными ей силами. Позже, в неолите ромб обозначал женское начало: с женщиной стали связывать плодородие. На свадебных юбках, на вышитых рукавах женских рубашек, на девичьих головных уборах очень часто встречается ромб.

Многие награды за окончание вузов и военных академий изготавливаются в форме ромба.

Ромб используют, как знак автомобилей.

«История возникновения синуса и косинуса»

Синус обязан своему появлению на свет великому индийскому математику-астроному Ариабхату. Он оказал большое влияние на возникновение тригонометрии дав точное определение синусу и косинусу. В своих работах ученый назвал синус ардха-джа (ардха – половина, джа – тетива лука, которую напоминает хорда). Люди называли его просто джа.

Арабские математики изучили работу Ариабхаты, перевели её на арабский язык, после чего новым именем синуса стало джиба. Позже при переводе арабских математических текстов оно было заменено латинским синус (sinus – изгиб, кривизна).

Ариабхата был первым, кто разработал детализированные таблицы синуса с интервалом 3.75° от 0° до 90° и до 4-х знаков после запятой. Он использовал алфавитный код для определения интервала. При использовании таблицы Ариабхаты, было доказано правильное значение $\mathrm{Sin}30^0$. Астрономические вычисления Ариабхаты подверглись некому влиянию арабов, которые обращались к его тригонометрическим таблицам для составления многих астрономических таблиц.

Слово *косинус* намного моложе синуса и пошло от сокращенного латинского выражения completely sinus, что обозначает “дополнительный синус”.

«История развития понятия площади»

Необходимость измерять площадь возникла у человека тогда, когда он стал переходить от кочевого образа жизни к оседлому. Занятие земледелием, строительством жилищ, другие виды деятельности потребовали измерения площади. Зачатки геометрических знаний, связанных с измерением площадей, теряются в глубине тысячелетий. Еще в 4 – 5 тысяч лет назад вавилоняне умели определять площадь прямоугольника и трапеции в квадратных единицах. Сохранились планы земельных участков, разделенных на треугольники, прямоугольники, трапеции. Их площади вычислялись как по точным правилам, так и приближенно.

В своих «Началах» Евклид не применял слово «площадь», так как он под словом «фигура» понимает часть плоскости, ограниченную той или иной замкнутой линией, и под понятием фигуры подразумевал и ее площадь. Евклид результат измерения площади не выражает числом, сравнивал площади различных фигур между собой. При решении задачи о построении квадрата, равновеликого любому данному Евклид оперировал самими площадями, а не числами, которые выражают эти площади. Извлечение квадратного корня для Евклида происходило не алгебраическим путем, а геометрическим: извлечь квадратный корень из числа означало построить стороны квадрата, площадь которого равна площади данного многоугольника.

Задача на вычисление площади круга так же возникла в глубокой древности. В папирусе Ахмеса описано, что за площадь круга S принимали квадрат со сторонами равными 8/9диметра^2, то есть $S = (\frac{8}{9} \cdot 2R)^2 = \frac{256}{81} R^2$. Для соотношения длины окружности к диаметру бралось π= 256/81 ≈ 3, 1605... В древнеегипетских и вавилонских текстах значение π=3, римляне принимали π=3,12... Эти значения были получены путем прямого измерения длины окружности с помощью веревки.

«Измерение площадей»

Вначале людей удовлетворяли субъективные меры, общие для жителей некоторой территории. Так, например, в Южной Индии единицей измерения площади был участок земли, который занимал загон овец. В России такой мерой был "плуг" - часть поля, которую можно было вспахать на паре волов за день. В Америке - индейцы при покупке земли в качестве единиц измерения принимали территорию, которую человек мог обежать за один день. Поэтому покупатели обычно нанимали для этой цели самого быстрого бегуна.

В Вавилоне простейшим из инструментов измерения площади была верёвка длиной в гар. Сначала ей мерили одну сторону поля, затем сторону перпендикулярную к ней и получали квадратный гар. Шумеры называли его шар или сар, вавилоняне – сару, что в переводе означает «грядка». Остальные меры площади получались пересчётом: 100 грядок составляли поле, по – вавилонски – ику; 6 полей – ашлу (верёвку). В переводе на наши меры ашлу-2,117 га. 3 верёвки составляли бур (колодец).

В Египте сечат, ремен, хесеб, са - меры площади. 1 сечат = 2 ременам = 4 хесебам = 8 са = 100 мехам = 2735 кв. м.

Как и во всех древних государствах, основной ценностью в Китае была земля. По – видимому, полномерным можно было считать поле – цин, состоявшее из 100 му земли. Сама же му состояла из 240 квадратиков со стороной, равной двойному шагу бу. Такой квадрат содержал 2,75 квадратных метра, следовательно, в му был 661 кв. м. Поле - цин было большой площадью. 3 и три четверти цин составляли квадратный ли. Таким образом: 1 цин = 100 му = 24000 кв. бу = 6,61 га.

Основной единицей площади в древнем Риме можно считать югер. Он делится на 2 квадратных акта, 2 югера составляли гередий. 200 югеров образовывали центурию, 4 центурии- сальт. Обычно мерили землю югерами, которые с древности делились на унции

В древности мерили землю в разных провинциях Италии по – разному: где пертикой (шестом), и там счётной единицей становилась квадратная пертика; где катеной (цепью) – с единицей квадратная катена. Основной поземельной единицей в большинстве мест Северной Италии была табула (полоса) и стайо.

Ещё во времена англосаксонов, VIII-X вв., в Англии существовала мера земли гайда или мансус, иначе её называли «плуговая запашка». Гайда определялась в 120 акров. Акр делился на 4 руда по 40 кв. родов, или перчей. Род^2 равен 25,29 кв. м, а в акре насчитывалось 160 таких родов. Была ещё малоупотребимая единица площади-ярдленд, равная 1/3 гайды.

В «Русской правде» - законодательном памятнике, который относился к 11-13 векам, употребляется земельная мера плуг. Это была мера земли, с которой платили дань. Есть некоторые основания считать плуг равным 8-9 гектарам. Как и во многих других странах, за меру площади участок принимали количество ржи, необходимое для засева этой площади. В 13-15 веках основной единицей площади была кадь- площадь, для засева которой нужно было примерно 400 кг ржи. Половина этой площади, получившая название десятина, стала основной мерой площадей в дореволюционной Руси. Она равнялась примерно 1,1 гектара. Десятина иногда называлась коробьей.

Другая единица, равная половине десятины, называлась четверть.

Налоговой единицей земли была соха (количество пахотной земли, которое был в состояние обработать один пахарь). В Новгороде – обжа, которая имела различные размеры в зависимости от качества земли и социального положения (духовенство, крестьяне, служильные).

Десятина, которая в быту местами имела и другие размеры, делилась на 2 четверти, четверть в свою очередь делилась на 2 осьмины, осьмины – на 2 полуосьмины, полуосьмина – на 2 четвертика и т.д.

В России это были старинные меры, узаконенные еще Петром 1. Вот они и их перевод в современные единицы измерения.

1квадратная (кв.) верста = 250000 кв. саженей = 1,1381 км^2;

1 десятина = 2400 кв. саженям =1,0925 га = 10925 м^2;

1 кв. сажень = 9 кв. аршинам =4,5522 м2;

1 кв. аршин = 256 кв. вершкам = =0,5058 м^2;

1 кв. вершок = 19,758 см^2.

Верста – от глагола «вертеть». Исходное значение – «расстояние от одного поворота плуга до другого во время пахоты» (1,067 км). До XVIII в. на Руси существовала и межевая верста в 1000 саженей (2,13 км), для определения расстояния между населенными пунктами и для межевания (межа – граница земельных владений в виде узкой полосы).

При Петре I была введена верста длиной в 500 саженей. На таком расстоянии друг от друга вдоль наиболее важных дорог ставили столбы, окрашенные в два цвета. Отсюда название «столбовая дорога». В начале XIX в. на «черно – белых» полосатых столбах появились цифры, которые показывали расстояние в верстах.

Сажень – происходит от слова «сягать», т.е. доставать до чего-либо. Различали три вида сажени: простая, маховая и косая. От глагола «сягать» слово «недосягаемый» - о месте, куда невозможно добраться. «Косая сажень» - (216 см) расстояние от пальцев левой ноги до конца пальцев правой руки.

Маховая сажень – расстояние между концами пальцев распростертых рук, это 3 аршина (176 см). Простая сажень – это расстояние между концами больших пальцев распростертых рук (152 см). Эта сажень называлась простой или прямой саженью, содержала4 локтя в или 8 пядей в 19 см. Десятина – старинная мера земельной площади. В России в первой половине XIX века существовало несколько видов десятин: Казенная 60*40= 2 400 кв. саженей (1,09 га), Хозяйственная 80*40= 3 200 кв. саженей (1,45 га), Круглая 60*60= 3 600 кв. саженей (1,64 га), Долгая 100*40= 4 000 кв. саженей (1,82 га), сотенная 100*100=10 000 кв. саженей (4,53га).

Существовала так же церковная десятина, впервые введѐнная Владимиром I. Десятую часть доходов отдавали церкви. Аршин - происходит от персидского слова "арш" - локоть. Это длина всей вытянутой руки от плечевого сустава до концевой фаланги среднего пальца. В аршине 71,1 см.

В разных губерниях России были свои единицы измерения длины, поэтому купцы, продавая свой товар, как правило, мерили его своим аршином, обманывая при этом покупателей. Чтобы исключить путаницу, был введен казенный аршин, т.е. эталон аршина, представляющий собой деревянную линейку, на концах которой клепались металлические наконечники с государственным клеймом.

Не метрические единицы измерения площади, применяемые в англоязычных странах:

Квадратная миля (США) (staturesquaremile) 2,58999 кв.км.

Акр (acre) 4046,86 м2=0,404686 га.

Квадратный ярд (squareyard) - 0,836127 кв.м.

Квадратный фут (squarefoot) - 926,030 кв.см.

Большинство старых мер забыто, вышло из употребления, но многие из них фигурируют в литературных произведениях, исторических памятниках. Они заложены в старинных постройках, в древних рецептах лекарств.

То, что в разных странах существовали различные меры длины, веса, площади и т. п., было неудобно. Это мешало развитию торговли, ремесел, поэтому назрела необходимость введения единой системы мер. В 1791 году Национальное собрание Франции по предложению Комиссии по мерам и весам Академии наук утвердило новую систему мер, которая, по мнению ее создателей, годилась "на все времена и для всех народов". В соответствии с этой системой длина измерялась в метрах, вес - в килограммах, а площадь земельных участков - в арах. В 1875 году 17 стран, в том числе и Россия, подписали. Метрическую конвенцию, по которой обязывались ввести в своих странах систему мер, разработанную французскими учеными. Но еще долго всюду употреблялись местные меры. Метрическая система мер была в России допущена в XIX в. законом разработанным Д.И. Менделеевым. Основная единица длины- 1 метр (от греческого слова "метрон"- мера). Метр равен 1/40000000 части земного меридиана. Эталон метра хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Основная единица площади 1 м^2. Только после Великой Октябрьской социалистической революции метрическая система стала обязательной на всей территории России. 14 сентября 1918 года был принят декрет "О введении международной метрической десятичной системы мер и весов". Окончательно же эта система вошла в употребление в СССР с 1927 года.

Список использованных источников

Литература

1. Геометрия: 7-9 классы: учебник для общеобразовательных организаций/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. М: «Просвещение», 2020.
2. Геометрия. 9 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений./ В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов – Москва: «Просвещение», 2019.
3. Геометрия: 7 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений /А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир, М.: «Вентана-Граф», серия «Алгоритм успеха», 2019.
4. Геометрия: 8 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений /А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир, М.: «Вентана-Граф», серия «Алгоритм успеха», 2019.
5. Геометрия: 7-9 классы: учебник для общеобразовательных организаций. А.В. Погорелов. М: «Просвещение», 2018.
6. Глейзер Г.И. История математики в школе 7-8 кл. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
7. Малых А.Е. Площади геометрических фигур: учеб. пособие / А.Е. Малых, М.И. Глухова: Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2011. – 108 с.
8. Математика. Основной государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: [учебное пособие]/ А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, П. И. Захаров, И.Р. Высоцкий, Л.А. Титова; под ред. И.В. Ященко – Москва: Издательство «Интеллект _ Центр», 2021.
9. Наглядная геометрия. 5-6 кл,: учебник/Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н.-М.: Дрофа, 2017.
10. ОГЭ по математике от А до Я. Задачи по геометрии.2020 год. / И.В. Ященко, С.А. Шестаков. М.: МЦНМО, 2020.
11. Саматов Н.М. Строительная математика. М.: Высшая школа, 1975.
12. Юшкевич А.П. История математики в средние века. М.: ГИФМЛ, 1961
13. Ященко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Задачи по геометрии. 2020 год. М.: МЦНМО, 2020. – 120 с.
14. Ященко И. В. ОГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания части 1 / И. В. Ященко, Л. О. Рослова, Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, А. С. Трепалин, П. И. Захаров, В. А. Смирнов, И. Р. Высоцкий; под ред. И. В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», МЦНМО, 2020. – 526, [2] с. (Серия «ОГЭ. Банк заданий»).

Интернет-ресурсы.

1. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений» Открытый банк заданий ОГЭ по математике https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge#!/tab/173942232-2
2. ФГБУ «Федеральный институт оценки качества образования» образцы и описания проверочных работ для проведения ВПР в 2021 году https://fioco.ru.
3. Открытый банк задач ЕГЭ по Математике (базовый и профильный уровни) (https://base.mathege.ru/, https://prof.mathege.ru/).
4. http://amazing-facts.ru/people/fakty_o_matematikah.html
5. https://artishki.ucoz.ru/publ/istorija/romb_kak_odin_iz_drevnejshikh_simvolnykh_arkhetipov_slavjan/2-1-0-71
6. https://multiurok.ru/blog/istoriia-vozniknoveniia-sinusa.html